

VISIT...

LANZAROTE
Caliente.COM

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ ПСИХОЛОГИИ

Ю. П. Леонов

ТЕОРИЯ
СТАТИСТИЧЕСКИХ
РЕШЕНИЙ
И ПСИХОФИЗИКА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
Москва 1977

Теория статистических решений и психофизика.
Л е о н о в Ю. П. М., «Наука», 1977, с. 223.

В монографии используется теория статистических решений для обоснования основных понятий современной психофизики, таких, как порог, пространство ощущений, шкалирование и др. Эта теория используется также для теоретического обоснования законов пространственной и временной суммации и закона Вебера.

Монография содержит ряд новых результатов, относящихся к теории порога, анализу собственных шумов, к М-функциям и закону Вебера. Анализ собственных шумов нейронной системы и таблицы для их оценки важны для практической обработки экспериментальных данных.

Монография предназначена для научных работников, аспирантов и студентов, работающих в области психофизики и в смежных областях.

Рис. 51, табл. 3, библи. 27 назв.

Ответственный редактор

член-корреспондент АН и АПН СССР

Б. Ф. ЛОМОВ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Традиционное представление о пороге как границе, которую может превзойти вызванное стимулом возбуждение, в последние годы стало постепенно изменяться как в отношении характеристики условий действия стимула на рецептор, так и в отношении анализа факторов, определяющих окончательную реакцию испытуемого. Исследование физических факторов действия света на фоторецептор, начатое в работе С. И. Вавилова «Микоструктура света», привело к выводу, что порог как фиксированная величина не существует. При благоприятных условиях достаточно всего одного кванта света, чтобы вызвать световое ощущение. Этот вывод подтвердился, с одной стороны, при изучении глаза мечехвоста: возникающий в ретикулярной клетке локальный дискретный потенциал есть следствие поглощения кванта света одной молекулой родопсина. С другой стороны, анализ факторов, определяющих реакцию испытуемого, также привел к отрицанию порога как фиксированной величины. Выяснилось, что характерной особенностью работы анализаторов являются внутренние шумы, в результате которых возникают реакции в отсутствие самого стимула. Эти шумы нервных элементов присутствуют на самых разных уровнях, начиная с рецептора. Так, при исследовании глаза мечехвоста оказалось, что распад молекулы родопсина может происходить в темноте, приводя к появлению дискретного потенциала, не отличимого от дискретного потенциала, возникающего при действии кванта света. Анализ работы наблюдателя в условиях порога показал далее, что вместо фиксированного порога реакции наблюдателя определяются управляемым порогом принятия решения, смещение которого определяет на выходе соотношение «ложных тревог» и «попаданий».

В результате открытия квантовой чувствительности, внутренних шумов и перестраивающегося порога принятия решения классические методы построения психометрических функций стали несостоятельными. Эффективным методом анализа работы наблюдателя в ситуации порога оказалась теория статистических решений. Эта теория может служить основой для понимания психофизических законов и объяснения экспериментальных результатов по различению сигналов. Вместе с тем ее применение к психофизике потребовало ряда уточнений и дальнейшего развития. Именно этому и посвящена данная работа. Оказалось, что введение теории статистических решений в психофизику не является делом формальным. На основании этой теории возникли новые представления о структуре и организации нейронных систем обработки информации. Более того, с ее помощью оказалось возможным обосновать некоторые ранее известные экспериментальные законы. Теория статистических решений стала современной теоретической базой психофизики.

В данной работе основное внимание уделяется теоретическому обоснованию и технике построения рабочих характеристик решения. Можно сказать, что построение рабочих характеристик заменило построение традиционной психометрической функции. Заслугой автора является то, что он сумел в рамках теории статистических решений связать рабочие характеристики с модифицированными психометрическими функциями, а также установить условия их эквивалентности и правила перехода от одних к другим. Центральной проблемой книги является анализ понятия «порог» в свете новых достижений нейрофизиологии. Следует приветствовать попытку автора дать интерпретацию основных психофизических законов с позиций теории статистических решений. Однако при обсуждении закона Вебера следует учитывать возможность преобразования сигнала, близкого к логарифмическому, на уровне рецептора, которое связано с «эффектом мишени». В фоторецепторе этот эффект состоит в том, что при увеличении интенсивности света все большее число локусов мембраны рецепторной клетки оказывается выключенным либо за счет распада молекул родопсина, либо за счет инактивации натриевых каналов, в результате чего каждое последующее приращение света находит все меньше и меньше мишеней и оказывает все более слабое действие.

Представляет интерес раздел, посвященный восприятию сигналов, являющихся функцией времени. Эта проблема мало разрабатана. Применение метода последовательного анализа позволяет оценить величину латентного периода двигательной реакции.

В современной литературе проблема шкалирования обычно рассматривается вне теории статистических решений. Автор сделал решительный шаг в направлении создания будущей статистической теории шкалирования. Новым и несколько неожиданным результатом применения теории статистических решений к психофизике оказался анализ проблемы критической полосы слухового восприятия. Учет собственных шумов слуховой системы позволил объяснить парадоксально узкую критическую полосу, полученную в эксперименте Флетчером.

В настоящее время рабочие характеристики широко используются не только в психофизике и общей психологии (например, при изучении памяти), но и в нейрофизиологии для представления работы отдельных нейронов, а также в лингвистике и социологии. Кроме того, особенности нейронных систем, выявленные при анализе психофизических проблем методами теории статистических решений, будут интересны также инженеру, в частности, в связи с созданием интегральных роботов.

Таким образом, книга представляет интерес для широкого круга читателей, занимающихся разными аспектами переработки информации в живых организмах и технических системах.

Доктор психологических наук Б. Ф. Ломов
Доктор биологических наук Е. Н. Соколов

ВВЕДЕНИЕ

В основу книги положены лекции по теории обнаружения слабых сигналов в нейронных системах, которые читались на факультете психологии МГУ для студентов 4—5-го курсов в 1971—1972 и в 1975—1976 гг.¹ В ней сделана попытка эффективно использовать теорию и установить границу ее применимости для изучения восприятия.

Теория обнаружения в ее настоящем виде была создана для анализа и синтеза оптимальных устройств для приема и обнаружения слабых сигналов. Ее применение к нейронным системам значительно интереснее и сложнее по сравнению с техническими системами. Это связано прежде всего с наличием в нейронных системах механизмов, отсутствующих в приемниках для оптимального обнаружения сигнала. К ним относятся механизмы формирования критерия на основании несенсорной информации. Такая информация включает в себя инструкции испытуемому, а также информацию, содержащуюся в памяти.

Таким образом, нейронные системы значительно сложнее приемников для обнаружения и выделения сигналов. Это подтверждают экспериментальные данные о восприятии человеком слабых сигналов (глава 5). Оказывается, только для узкого диапазона условий нейронная система функционирует как оптимальный приемник. Для других условий ее действие существенно отличается от оптимального. Отсюда следует, что если даже принять, что нейронная система использует отношение правдоподобия, то функция правдоподобия и порог решения могут существенно отличаться от этих величин в оптимальном приемнике. Это связано с тем, что на выбор функции правдоподобия и порога в нейронной системе оказывает влияние несенсорная информация, поступающая в механизм принятия решения.

Однако действительная польза теории обнаружения заключается в том, что она позволяет по-новому подойти к пониманию некоторых основных проблем психофизики с единой точки зрения.

¹ Под нейронной системой человека или животного понимается сенсорная система, включающая в себя рецепторы, механизмы принятия решения, память и «выходные» органы, осуществляющие реакции.

Мы начинаем с понятия порога как критического значения стимула x^* , введенного Фехнером [12]. Теория обнаружения дает нам возможность прежде всего выделить существенные параметры, характеризующие процесс принятия решения. Ими являются

$$\theta^* = x^*/\sigma \text{ и } d' = (s - m_n)/\sigma,$$

где σ — среднеквадратическое значение собственного шума нейронной системы; m_n — математическое ожидание собственного шума; s — величина стимула.

Именно параметры θ^* и d' определяют вероятности попадания и ложной тревоги и, следовательно, характеризуют процесс принятия решения. Здесь мы неожиданно подходим к решению одного из самых сложных и запутанных вопросов психофизики — к вопросу о существовании порога x^* .

Теория обнаружения указывает простое решение: в каждой задаче обнаружения сигналов необходимо определить существенные параметры, характеризующие процесс принятия решения. Тогда выясняется, что факт существования (или несуществования) порога x^* не может что-либо изменить при решении этой задачи. Поэтому этот вопрос является скорее гносеологическим. Попутно выясняется, что порог x^* , по-видимому, не принадлежит к числу таких параметров.

Таков ответ, даваемый теорией решений, на вопрос о существовании порога x^* .

Если обратиться к более общим характеристикам процесса решения, то таковыми являются рабочие характеристики процесса решения. Можно установить, что существует эквивалентное им семейство кривых, являющихся функциями d' , названное М-функциями. Любопытно заметить, что обычные психометрические функции не эквивалентны рабочим характеристикам с точки зрения содержащейся информации о принятии решения.

Психометрические функции содержат скрытый параметр (σ), зависящий от собственных шумов нейронной системы. В связи с этим задача оценки собственных шумов представляется чрезвычайно важной и интересной. Простые вычисления показывают, что пренебрежение собственным шумом при анализе абсолютной и дифференциальной чувствительности может привести к серьезным ошибкам. В частности, такие ошибки могут возникнуть в задаче оценки «порогов».

Более подробное изучение характера собственных шумов нейронной системы приводит к пониманию и обоснованию психофизических законов, а также к решению многих задач психофизики, в частности предположение о линейной функции $\sigma(s)$ приводит нас к закону Вебера (глава 7).

Учет собственных шумов позволяет также удовлетворительно решить проблему оценки критической полосы при восприятии звукового сигнала, смешанного с «белым» шумом. До сих пор попытки оценки критической полосы, основанные на модели энер-

гетического детектора, давали результат 1000 гц, на порядок, отличающийся от экспериментального (60 гц, Флетчер) (глава 10).

Наконец, следует упомянуть еще об одной проблеме, связанной с собственными шумами. Речь идет о различных теориях порога. Эти теории следует рассматривать как попытки построить рабочие характеристики нейронной системы при восприятии сигналов на фоне собственных шумов. При этом различные теории получаются при тех или иных предположениях о собственных шумах системы.

Рассмотрим другие проблемы психофизики с точки зрения теории статистических решений. Интересной является проблема оптимальности решений, принимаемых нейронной системой. Всякое решение, принятое на основании правила отношения правдоподобия, является в некотором смысле оптимальным. Например, его можно считать оптимальным по критерию Неймана — Пирсона. Поэтому если считать, что в нейронной системе используется пороговое правило для отношения правдоподобия, то следует признать, что в ней используется оптимальная стратегия. Однако мы пока не в состоянии понять, почему в системе используется именно эта оптимальная стратегия, а не другая. В частности, если бы мы использовали оптимальный приемник для выделения сигнала из шума, то последний отличался бы своими параметрами от нейронной системы, предназначенной для решения этой задачи. Нейронная система работала бы несколько хуже. Таким образом, возникает очень важная проблема понимания «оптимальности с точки зрения нейронной системы».

Наконец, теория решений позволяет подойти к решению еще одной важной проблемы — проблемы шкалирования.

Функция отношения правдоподобия позволяет естественным образом «сконструировать» сенсорное пространство. За единицу величины ощущения в этом пространстве можно принять порог на шкале отношения правдоподобия. Используя эту шкалу, можно построить не одно, а множество сенсорных пространств. Этому множеству принадлежат логарифмическая шкала Фехнера и степенная шкала Стивенса (глава 11). Различие между этими шкалами связано, по-видимому, с неодинаковым характером собственных шумов в разных опытах.

Существует определенный круг психофизических проблем, которые могут быть поняты на основе теории принятия решения. Наиболее важно, что эта теория может составить единую основу для понимания совершенно различных проблем и экспериментальных результатов. Это, по-видимому, то, в чем более всего нуждается современная психофизика.

Не следует, однако, думать, что в этом направлении удалось решить все основные проблемы. Были рассмотрены лишь некоторые основные понятия современной психофизики. Некоторые проблемы оказываются слишком сложными и ускользают от рассмотрения. К ним относится, например, функциональное разделение

нейронной системы на блоки, такие, как механизмы памяти, механизмы принятия решений и др. Теория статистических решений позволяет лишь коснуться этих важных проблем.

С другой стороны, некоторые важные вопросы здесь совсем не нашли своего отражения. К ним относятся, например, задачи различения временных интервалов, распознавания образов и т. д.

Книга содержит многочисленные примеры, иллюстрированные графиками. Текст сосредоточивает внимание читателя на психофизических аспектах, поскольку основное математическое содержание вынесено в «Приложения».

Книга оказалась возможной благодаря инициативе и неуступному вниманию профессора Е. Н. Соколова. Существенную поддержку в работе оказали профессор Б. Ф. Ломов и профессор Е. В. Шорохова. Ряд важных замечаний был сделан при чтении рукописи Ю. М. Забродиным, Н. Н. Корж и С. Беляковой, которые оказали также существенную помощь при редактировании и подготовке рукописи. Всем им автор выражает свою глубокую благодарность.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ СТАТИСТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

§ 1. Определения

Теория принятия решений может рассматриваться с двух точек зрения. С одной стороны, это некоторая абстрактная теория, которую можно использовать для описания принятия решений. Как возникла она и отражает ли реальные процессы мышления — нас не интересует.

С другой стороны, эта теория может служить моделью реальных процессов, происходящих в живых системах, принимающих решения. Это — психологический аспект проблемы. В этом случае теорию принятия решений можно использовать для весьма общего описания поведения в рамках исследования стимул — реакция. Именно в этом заключается интерес теории для психологии.

В начале теория принятия решений будет рассмотрена как абстрактная теория. Затем она будет использована для получения различных моделей поведения в рамках исследования стимул — реакция.

Теория принятия решений — статистическая теория и, следовательно, в ней используется понятие вероятности. Она является достаточно общей и может быть применена для весьма общих задач. Итак, вначале следует сформулировать основные понятия этой теории. В ней используются три группы символов. Во-первых, символы $h_1, h_2, \dots, h_m$, описывающие состояние внешней среды, они могут быть числами или событиями. Во-вторых, символы $H_1, H_2, \dots, H_m$, описывающие высказывания относительно состояний h_i . События H_i называются гипотезами. И, наконец, используются данные $e_1, e_2, \dots, e_n$, определяющие информацию о внешней среде, полученную в опыте.

Пример 1.1.

h_1 — дождь (действительное состояние); h_2 — хорошая погода (действительное состояние); H_1 — дождь (гипотеза); H_2 — хорошая погода (гипотеза); e_i — показания барометра; e_1 — низкое давление; e_2 — высокое давление.

Основной задачей теории статистических решений или теории проверки гипотез является проверка правдоподобности или истинности той или иной гипотезы H_i ($i = 1, 2, \dots, m$) на основании

имеющейся информации e_i ($i = 1, 2, \dots, n$) о состоянии h_i внешнего мира.

Разумеется, проверять истинность той или иной гипотезы необходимо только в том случае, если имеющиеся сведения о действительных состояниях (в примере — это показания барометра e_1 и e_2) не достаточны для достоверного подтверждения той или иной гипотезы. Именно по этой причине наши утверждения являются лишь вероятностными.

§ 2. Решающее правило

Первый вопрос, который возникает при принятии решения, относится к решающему правилу, на основании которого можно принять или отклонить предполагаемую гипотезу.

Существует очень простое и вместе с тем общее решающее правило, которое используется в теории принятия решений. Для этого вначале следует дать вероятностное описание состояний внешнего мира ¹.

Предположим, что нам известны априорные вероятности $q_i = p(h_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) состояний h_i ; эти состояния составляют полную систему событий, так что

$$\sum_{i=1}^m q_i = 1.$$

После получения информации $e_1, e_2, \dots, e_n$ единственное изменение наших знаний состоит в том, что априорные вероятности p_i перейдут в апостериорные вероятности

	H_1	H_2	$\dots$	H_i	$\dots$	H_m
h_1						
h_2						
$\vdots$						
h_j				$p(H_i/h_j)$		
$\vdots$						
h_m						

Р и с . 1.1. Апостериорные вероятности гипотез

$p(h_i/e_j)$ (Приложение I). Эти числа и являются той реальной информацией, которая имеется для принятия решения. На рис. 1.1 апостериорные вероятности различных гипотез приведены в клетках диаграммы.

Простое и важное решающее правило статистической теории решения состоит в том, чтобы сравнить между собой апостериорные вероятности различных гипотез и принять ту из них, для которой эта апостериорная вероятность наибольшая.

В случае выбора между двумя гипотезами h_1 и h_2 (случай двухальтернативной простой гипотезы) решающее правило запишется следующим образом:

¹ Основные сведения по теории вероятностей содержатся в Приложении I.

если

$$p(h_1/e_i) > p(h_2/e_i), \quad (1.1)$$

то принимается H_1 ;

если

$$p(h_2/e_i) \geq p(h_1/e_i),$$

то принимается H_2 .

Смысл решающего правила состоит в том, что принимается более вероятная гипотеза с учетом наблюдения.

Используя теорему Бейеса, можно записать решающее правило (1.1) в другой форме, удобной для вычислений и позволяющей распространить задачу на более общие случаи. На основании теоремы Бейеса имеет место (см. Приложение I)

$$p(h_i/e_j) = \frac{p(e_j/h_i) q_i}{p(e_j)}. \quad (1.2)$$

Согласно (1.2) условие (1.1) можно записать так:

если

$$\frac{p(e_j/h_2)}{p(e_j/h_1)} < \frac{q_1}{q_2}, \quad \text{то } H_1,$$

если

$$\frac{p(e_j/h_2)}{p(e_j/h_1)} \geq \frac{q_1}{q_2}, \quad \text{то } H_2.$$

Или окончательно:

если

$$\lambda(e_j) \geq \lambda_0, \quad \text{то } H_2; \quad (1.3)$$

если

$$\lambda(e_j) < \lambda_0, \quad \text{то } H_1,$$

где

$$\lambda(e_j) = \frac{p(e_j/h_2)}{p(e_j/h_1)}; \quad (1.4)$$

$$\lambda_0 = \frac{q_1}{q_2}. \quad (1.5)$$

Именно в виде (1.3) решающее правило применяется в теории решений. Функция $\lambda(e_j)$ ($j = 1, 2, \dots, n$) называется отношением правдоподобия, а величина λ_0 — порогом¹.

Правило (1.3) по своему содержанию совершенно эквивалентно правилу (1.1) и является лишь другой формой записи последнего. Однако эта форма допускает широкие обобщения полученного

¹ Иногда порог λ_0 называют также критерием [14].

результата, и именно в такой форме обычно проводятся вычисления.

Пример 1.2.

Простейший психофизический эксперимент, к которому применимо правило (1.4), состоит в обнаружении сигнала наблюдателем на фоне собственных шумов. Пусть h_2 — состояние, в котором на рецепторы действует раздражитель s (чистый звуковой тон с амплитудой s). Сигнал s смешивается с внутренним шумом, возникающим в нейронной цепи. Это может быть, например, нейрональный шум в синаптических передачах или собственный шум в нейронах.

Решение о наличии сигнала (гипотеза H_2) принимается наблюдателем на основании сигнала $e_i = s + n_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$), где n_i — внутренний шум, причем величина n_i может принимать m дискретных значений: $n_1, \dots, n_m$. Сигнал e_i , используемый наблюдателем для принятия решения, также является дискретным и может принимать $2m$ значений (соответственно для $s = 0$ и $s \neq 0$). В состоянии h_1 (гипотеза H_1) на рецепторы не действует раздражитель ($s = 0$). При использовании правила (1.3) необходимо знать апостериорные вероятности $p(e_j / s)$ и $p(e_j / 0)$ ($j = 1, 2, \dots, m$), значение порога λ_0 , вероятность появления полезного сигнала q_2 , вероятность присутствия одного шума $q_1 = 1 - q_2$.

Правило (1.3) является основным в теории статистических решений. Однако возникает естественный вопрос: какие основания имеются к тому, что решающее правило окажется применимым при решении психофизических задач? В частности, почему следует ожидать, что функционирование нейронной системы человека или животного определяется правилом, подобным (1.3)? Ответить на это не просто. Обоснованию применимости правила (1.3) в психофизике и посвящена эта книга.

Однако в психофизике имеются глубокие основания для применения решающего правила (1.3), которые связаны с такими понятиями, как порог ощущений, сенсорное пространство, шкалирование.

Для того чтобы это понять, следует рассмотреть возможную психофизическую интерпретацию правила (1.3).

Одним из основных предположений современной психофизики является предположение о существовании «пространства ощущений» или «сенсорного пространства». Именно предполагается, что наряду с физическим пространством, в котором определены ощущаемые нами объекты, как звук, свет и т. д., имеется «пространство ощущений». При восприятии объекты «отображаются» нейронной системой в пространство ощущений, и на основании этого «отображения» принимаются решения. Так, например, решение о том, какой из двух звуков «громче в два раза, чем другой», принимается на основании «ощущения» громкости, а не на основании величины громкости, выраженной в физических единицах (например,

в децибеллах). Существование единиц ощущения громкости и было доказано экспериментально, и они получили название *сонов*.

Точно так же единицы «ощущения высоты» звука — *мелы* не совпадают с частотой, выраженной в герцах. То же самое можно сказать о других модальностях.

Следовательно, экспериментальные исследования позволяют утверждать, что субъективная шкала ощущений не совпадает со шкалой соответствующих стимулов в физических единицах. Поэтому пространство ощущений не является точной копией пространства стимулов. Однако сенсорное пространство является в такой же степени реальным, как и пространство стимулов, так как является отражением последнего. Построение такого пространства составляет одну из основных задач психофизики и получило название *шкалирования*.

Первая шкала — логарифмическая — была предложена Фехнером [12]. Затем на основании работ С. Стивенса, Л. Терстона (см. [22]) и других исследователей были развиты прямые методы «измерения ощущений» и построена степенная шкала. Таким образом, с появлением работ Стивенса «пространство ощущений» является не только теоретической гипотезой, но и подтверждено экспериментально.

На основании понятия «пространство ощущений» можно предложить простую и естественную психофизическую интерпретацию функции отношения правдоподобия $\lambda(x)$. Именно можно считать, что функция $\lambda(x)$ задает преобразование «пространства стимулов» в «пространство ощущений».

При такой интерпретации функции $\lambda(x)$ естественно принять приращение величины ощущения ΔI пропорциональным порогу λ_0 (точнее, некоторой монотонной функции $\tilde{\lambda}(\lambda_0)$) на шкале отношения правдоподобия. При этом порог λ_0 должен соответствовать разностному порогу Δs . Таким образом, можно записать

$$\Delta I = k\tilde{\lambda}(\lambda_0), \quad (1.6)$$

где k — коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора единицы величины; $\tilde{\lambda}(\cdot)$ — монотонная функция, удовлетворяющая условию $\tilde{\lambda}(1) = 0$.

Если желательно принять ΔI за единицу измерения величины ощущения, то ΔI не должна зависеть от величины стимула s . В этом случае порог λ_0 в (1.6) должен быть инвариантным по отношению к изменению s .

Определение порога λ_0 , обладающего этим свойством, рассматривается в главе 11. В частности, там показано, что соотношение (1.6) имеет важное значение для шкалирования.

В пространстве ощущений решение всегда принимается на основании простого правила (1.3): если приращение ощущения превышает некоторый порог λ_0 , то принимается положительное

решение о проверяемой гипотезе (например, о присутствии полезного сигнала). В противном случае гипотеза отвергается. Таким образом, мы здесь возвращаемся к основной идее классической психофизики — идее порога. Но эта идея используется уже не в пространстве стимулов, а в сенсорном пространстве. Как мы увидим дальше, это не одно и то же. С другой стороны, пространство стимулов в соответствии с (1.3) делится на два непересекающихся пространства Γ_1 и Γ_2 :

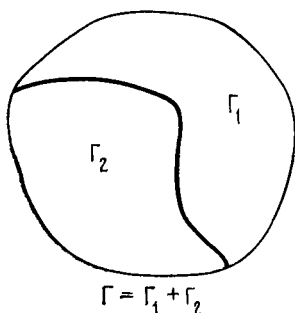
если $e_j \in \Gamma_1$, то принимается гипотеза H_1 ;

если $e_j \in \Gamma_2$, то принимается гипотеза H_2 .

Граница, разделяющая области Γ_1 и Γ_2 в пространстве x ($x_1, x_2, \dots, x_n$), определяется уравнением

$$\lambda(x^*) = \lambda_0. \quad (1.7)$$

Пространство стимулов на основании (1.7) может разбиваться на многосвязные области очень сложной формы. На рис. 1.2 показан простой случай разбиения Γ на Γ_1 и Γ_2 , когда пространство стимулов x является двумерным (плоскость (x_1, x_2)).



Р и с. 1.2. Пространство состояний Γ

является двумерным (плоскость (x_1, x_2)). Таким образом, переход в пространство ощущений значительно упрощает задачу принятия решения.

Следует заметить, что в простейшем случае правило (1.3) совпадает с классическим «пороговым» правилом принятия решения, основанном на существовании абсолютного порога x^* величины стимула. Это правило формулируется следующим образом: если $\lambda(x)$ — непрерывная, монотонно возрастающая функция скалярной величины x , то из (1.3) следует правило

если $x \geq x^*$, то принимается гипотеза H_2 ;

если $x < x^*$, то принимается гипотеза H_1 . (1.8)

В силу монотонности $\lambda(x)$ порогу λ_0 соответствует единственный порог x^* на оси стимула и, наоборот, порогу x^* соответствует единственный порог λ_0 на оси отношения правдоподобия.

В общем случае (немонотонной функции $\lambda(x)$) правило (1.3) неэквивалентно правилу (1.8) и является обобщением последнего.

Возможность естественной психофизической интерпретации решающего правила (1.3) позволяет надеяться на эффективность его применения для исследования нейронных систем. В последующих главах мы пытались показать, как это можно сделать, основываясь на существовании пространства ощущений. В частности, в главе 6 шкала правдоподобия используется для анализа понятия «порог ощущения», а в главе 11 — для анализа одного из основных понятий психофизики «сенсорное пространство».

ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМЫ, ПРИНИМАЮЩЕЙ РЕШЕНИЯ

§ 1. Функция отношения правдоподобия

В этом параграфе рассматриваются основные характеристики системы, принимающей решения по правилу (1.3). Системы, работающие по правилу отношения правдоподобия, весьма разнообразны и могут иметь очень сложную структуру. Ими могут быть какие-либо технические устройства, например, для принятия слабых сигналов, машины для технической или медицинской диагностики либо нейронные системы, принимающие решения.

Способ описания таких систем остается общим.

Однако между техническими и нейронными системами, принимающими решения по правилу (1.3), имеется существенное различие. Когда речь идет о технической системе, то отношение правдоподобия $\lambda(e_j)$ и порог λ_0 в (1.3) определяются на основании известных условий задачи. В случае нейронной системы эти величины остаются неизвестными. В самом деле, пусть нейронная система решает задачу выделения раздражителя s на фоне собственных (нейрональных) шумов. В этом случае e_j является смесью полезного сигнала s и нейронального шума n . Но тогда функции $p(e_j/s)$ и $p(e_j/n)$ в (1.4) оказываются неизвестными, так как неизвестен способ смешения сигнала s с нейрональным шумом n и неизвестны характеристики последнего. Неизвестным также является порог λ_0 , который используется системой для принятия решения. Таким образом, даже если нейронная система работает по правилу (1.6), задача анализа такой системы значительно усложняется.

Однако перед тем как перейти непосредственно к исследованию нейронных систем, важно рассмотреть общий способ описания систем, работающих по правилу (1.3).

Рассмотрим более сложную задачу по сравнению с задачей проверки гипотез в первой главе¹. Так же как и раньше, требуется проверить гипотезы о состояниях природы $h_1, h_2, \dots, h_m$. Однако информация о состояниях задана в более общей форме, а именно эта информация определяется случайным вектором $X(X_1, X_2, \dots, X_k)$, причем каждая компонента вектора

¹ В главе 1 предполагалось, что информация о векторе h является дискретной случайной величиной со значениями e_j .

является непрерывной случайной величиной (см. Приложение 1). Итак, имеются два вектора

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_k \end{bmatrix}. \quad (2.1)$$

Таким образом, информация, получаемая нами в опыте, состоит из последовательности k непрерывных случайных величин.

Пример 2.1.

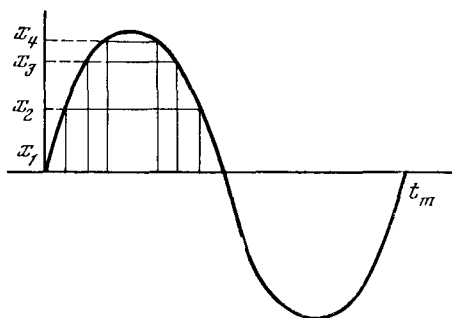
Пусть на рецепторы действует звук заданной частоты и интенсивности, являющейся сигналом вида

$$x(t) = A \sin \omega t,$$

где A — интенсивность сигнала.

Сигнал действует на систему на интервале $(0, T)$. Если для определенности положить $T = 10$, то сигнал $x(t)$ будет иметь вид, приведенный на рис. 2.1 (сплошная кривая).

Однако рецепторы воспринимают лишь дискретные уровни сигнала. Поэтому вместо непрерывного сигнала $x(t)$ в нейронную



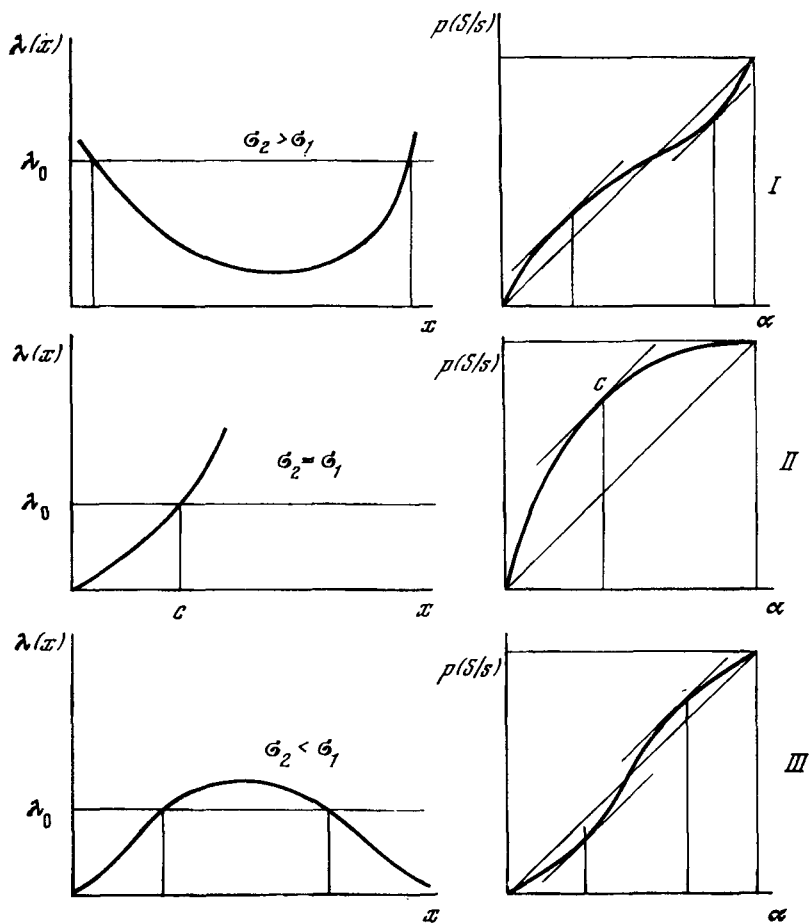
Р и с. 2.1. Дискретное представление сигнала

систему поступает дискретный сигнал (ступенчатая функция на рис. 2.1).

Таким образом, можно видеть, что рецепторы воспринимают вектор. На первом полупериоде синусоиды этот вектор имеет вид $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_4, x_3, x_2, x_1)$. Чем выше чувствительность рецепторов, тем более точно система может воспринимать непрерывный сигнал $x(t)$, так как число уровней квантования при этом увеличивается.

Как уже было установлено в первой главе, для принятия решения в случае простой альтернативы (две гипотезы H_1 и H_2) следует вычислить функцию отношения правдоподобия $\lambda(x_1, \dots, x_h)$, которая может быть функцией k переменных.

Функция $\lambda(x)$ определяется для непрерывных случайных величин (2.1) вполне аналогично (1.4). Разница заключается лишь в том, что вместо вероятностей $p(e_j/h_1)$ и $p(e_j/h_2)$ используются



Р и с. 2.2. Функция отношения правдоподобия и РХ

условные плотности вероятности $f(x/s)$ и $f(x/n)$ векторной случайной величины (2.1) (см. Приложение I).

Следовательно, независимо от того, с каким сигналом x приходится иметь дело, общее решающее правило (1.3) связано с переходом от шкалы сигналов x к шкале отношения правдоподобия $\lambda(x)$. Если пространство стимулов является многомерным $x(x_1, \dots, x_k)$, например при восприятии зрительного образа, то шкала отношения правдоподобия всегда одномерна. Отсюда следует неэквивалентность шкалы $\lambda(x)$ шкале x . Однако даже для одномерного сигнала x шкала $\lambda(x)$ не всегда эквивалентна шкале x . Если $\lambda(x)$ является взаимно-однозначной функцией, то каждому x соответствует одно и только одно значение $\lambda(x)$, и наоборот. В этом случае шкала $\lambda(x)$ эквивалентна шкале x . Это

видно из рис. 2.2, II, где $\lambda(x)$ является монотонно возрастающей функцией. В противном случае шкала отношения правдоподобия $\lambda(x)$ не эквивалентна шкале сенсорных сигналов, т. е. на оси стимула x может не существовать единственного порога x^* , определенного Фехнером и Вебером. Тогда следует говорить о пороге λ_0 для отношения правдоподобия. Следовательно, порог λ_0 обобщает понятие порога x^* , введенного Вебером и Фехнером.

Пример 2.2.

Рассмотрим, какой вид имеет функция $\lambda(x)$ для нормальных апостериорных плотностей вероятности, когда среднеквадратичные значения σ_1 , σ_2 плотностей вероятности $f(x/h_1)$, $f(x/h_2)$ равны и для неравных σ_1 , σ_2 .

Случай $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$

Для отношения правдоподобия имеем

$$\lambda(x) = \frac{f(x/h_2)}{f(x/h_1)},$$

$$\lambda(x) = \exp \left[\frac{1}{\sigma^2} (m_2 - m_1) x - \frac{1}{2\sigma^2} (m_2^2 - m_1^2) \right].$$

Положив

$$d' = \frac{m_2 - m_1}{\sigma} = \frac{\Delta m}{\sigma},$$

для $\ln \lambda(x)$ можно записать

$$\ln \lambda(x) = \frac{d'}{\sigma} \left(x - \frac{m_2 + m_1}{2\sigma} \right) = d'x',$$

где

$$x' = \frac{1}{\sigma} \left(x - \frac{m_2 + m_1}{2\sigma} \right).$$

Следовательно, отношение правдоподобия принимает вид рис. 2.2 (II)

$$\lambda(x') = \exp d'x', \quad \ln \lambda(x) = d'x'.$$

Таким образом, при $\sigma_1 = \sigma_2$ отношение правдоподобия является монотонной функцией x . Каждому значению порога λ_0 соответствует единственная точка x^* на оси x и наоборот. Порог x^* есть критическое значение стимула. Именно в этом смысле понимали порог Вебер, Фехнер, Кравков и другие исследователи.

Случай $\sigma_1 \neq \sigma_2$

Здесь $\lambda(x)$ уже может быть немонотонной функцией. Следует рассмотреть случаи $\sigma_2/\sigma_1 \geq 1$, $\sigma_2/\sigma_1 < 1$. Отношение правдоподобия для них представлено на рис. 2.2 (I, III). Характер кривой $\lambda(x)$ для $\sigma_2/\sigma_1 > 1$ легко объяснить, если обратиться к плотностям вероятности $f(x/h_2)$ и $f(x/h_1)$ (2.3). При отрицательных значениях x величина $f(x/h_2)$ больше величины функции $f(x/h_1)$, поэтому отношение правдоподобия вначале убывает от бесконечности при $x = -\infty$ до единицы в точке $x = a$. Это убывание

является следствием возрастания значений функции $f(x/h_1)$ при увеличении x . Затем имеется интервал, в котором из-за резкого возрастания $f(x/h_1)$ рост функции $\lambda(x)$ замедляется. В точке $x = b$ отношение правдоподобия еще раз делается равным единице. Затем функция вновь возрастает вследствие увеличения функции $f(x/h_2)$.

Отношение правдоподобия в случае $\sigma_2 \neq \sigma_1$ имеет вид

$$\lambda(x) = 1/\chi \exp \frac{1}{2\sigma_2^2} [\chi^2 (x - m_1)^2 - (x - m_2)^2],$$

где $\chi = \sigma_2/\sigma_1$.

§ 2. Рабочая характеристика процесса решения

Важно уметь описать процесс решения, осуществляемого сенсорной системой. Так как решение принимается в соответствии с детерминированным правилом (1.3), то при принятии или отклонении гипотезы можно совершить ошибку двух видов. Если мы отклоняем гипотезу H_1 , когда она истинна, то совершается ошибка первого рода. Если мы примем гипотезу H_1 , когда она в действительности не имеет места, то совершается ошибка второго рода.

Выбор границы, разделяющей Γ_1 , Γ_2 , однозначно определяет вероятности ошибок первого и второго родов. Действительно, если α — вероятность ошибки первого рода, то согласно определению она равна условной вероятности $p(H_2/h_1)$:

$$\alpha = p(X \in \Gamma_2/h_1) = \int_{\Gamma_2} f(x/h_1) dx, \quad (2.2)$$

где $f(x/h_1)$ — условная плотность вероятности вектора X при условии, что имеет место h_1 , т. е. гипотеза H_1 истинна. Если β — вероятность ошибки второго рода, то она равна условной вероятности $p(H_1/h_2)$:

$$\beta = p(X \in \Gamma_1/h_2) = \int_{\Gamma_1} f(x/h_2) dx, \quad (2.3)$$

где $f(x/h_2)$ — плотность вероятности вектора X при условии, что гипотеза h_2 истинна.

В (2.2) и (2.3) использовано одно и то же обозначение $f(\cdot)$ для двух разных функций.

Замечание. Формулы (2.2) и (2.3) получаются согласно правилам вычисления вероятности попаданий случайной точки в заданную область (Γ_1 или Γ_2). В данном случае Γ_1 , Γ_2 являются областями K -мерного пространства, так как наблюдается вектор X . Если X является непрерывным вектором, то в (2.2) и (2.3) используются условные плотности вероятности. Если X — дискретная случайная величина (в первой главе она обозначалась e_j), то в (2.2) и (2.3) используются условные вероятности $p(x_i/h_1)$,

$p(x_i/h_2)$, при этом интегралы переходят в суммы:

$$\alpha = \sum_{x_n \in \Gamma_2} p(x_n/h_1), \quad (2.2')$$

$$\beta = \sum_{x_n \in \Gamma_1} p(x_n/h_2). \quad (2.3')$$

Пример 2.3.

Пусть, например, $X = s + n$ — случайная величина, являющаяся суммой полезного сигнала s и шума n , распределенного по нормальному закону. Если проверяется двухальтернативная гипотеза $s \neq 0$ или $s = 0$, то должны быть даны апостериорные плотности вероятности $f(x/s)$ и $f(x/n)$, которые в данном случае являются нормальными плотностями и имеют вид

$$f(x/s) = (2\pi D)^{-\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{(x-s)^2}{2D} \right],$$

$$f(x/n) = (2\pi D)^{-\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{x^2}{2D} \right].$$

В этом случае ошибки первого и второго родов выражаются интегралами (2.2) и (2.3).

Если же шум n может принимать только дискретные значения $n_1, n_2, \dots, n_k$, то апостериорные плотности вероятности $f(\cdot)$ должны быть заменены дискретными распределениями $p(x_i/s)$ и $p(x_i/0)$. Интегралы (2.2) и (2.3) перейдут при этом в суммы (2.2') и (2.3').

Из определения α и β следует, что $1 - \alpha$ есть вероятность правильного решения, когда h_1 истинна, причем

$$1 - \alpha = p(X \in \Gamma_1/h_1) = \int_{\Gamma_1} f(x/h_1) dx, \quad (2.4)$$

$1 - \beta$ есть вероятность правильного решения, когда H_2 истинна, при этом

$$1 - \beta = p(X \in \Gamma_2/h_2) = \int_{\Gamma_2} f(x/h_2) dx. \quad (2.5)$$

Формулы (2.2) — (2.5) определяют вероятности всех исходов процесса решения. Из выражений (2.2) и (2.3) следует, что нельзя добиться сколь угодно малого уменьшения α и β одновременно.

Действительно, если, например, уменьшать α , то следует уменьшать область Γ_2 , так как интеграл берется от неотрицательной функции $f(x/h_1)$, но тогда увеличивается область Γ_1 , так как $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, и, следовательно, увеличивается вероятность ошибки второго рода β , и наоборот.

Это можно уяснить по рис. 1.2. Так как области Γ_1 и Γ_2 не пересекаются и вместе составляют область Γ , то увеличение области Γ_1 влечет за собой уменьшение области Γ_2 и, наоборот, увеличение Γ_2 приводит к уменьшению Γ_1 . Увеличение площади Γ_1 приводит к увеличению β и уменьшению α за счет уменьшения площади Γ_2 .

Таким образом, можно лишь надеяться иметь минимальную вероятность ошибки одного вида при заданной вероятности ошибки другого вида.

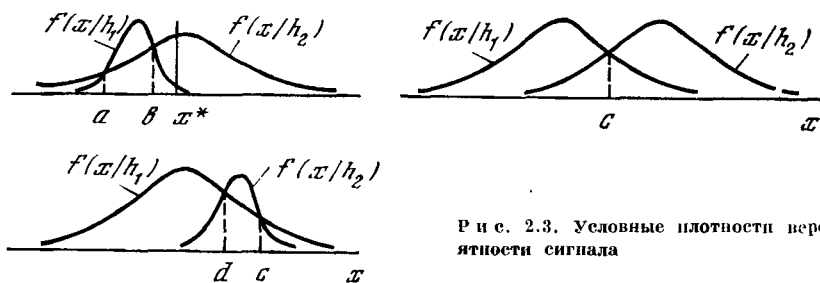


Рис. 2.3. Условные плотности вероятности сигнала

За характеристику системы, принимающей решения в соответствии с правилом (1.3), можно принять зависимость вероятности (2.5)

$$p(H_2/h_2) = 1 - \beta$$

от вероятности α :

$$\alpha = p(H_2/h_1).$$

Эта зависимость называется *рабочей характеристикой решения* (РХ).

Величина $1 - \beta$ равна вероятности правильного решения о гипотезе H_2 , когда она истинна.

В дальнейшем $1 - \beta$ называется вероятностью обнаружения. Величина α равна вероятности ошибочного решения в пользу гипотезы H_2 , когда в действительности имеет место h_1 . Поэтому α называется вероятностью ложной тревоги. Две другие вероятности, $1 - \alpha$ и β , тогда определены. Поэтому вероятности $p(H_2/h_2)$, $p(H_2/h_1)$ полностью описывают процесс решения. Если выбирают различные значения порога x^* , то одновременно изменяются как вероятность $p(H_2/h_2)$, так и вероятность ложной тревоги $p(H_2/h_1)$. Это видно из рис. 2.3, на котором изображена ось стимула x , даны апостериорные плотности $f(x/h_2)$ и $f(x/h_1)$ и значение порога x^* . При этом вероятность α равна площади под кривой $f(x/h_1)$ справа от x^* , а $1 - \beta$ равна площади под кривой $f(x/h_2)$, расположенной также справа от точки x^* . При увеличении порога x^* обе вероятности, $1 - \beta$ и α , увеличиваются и при $x^* = \infty$ становятся равными единице. При уменьшении x^* обе вероятности уменьшаются и при $x^* = -\infty$ становятся равными нулю. Следовательно, вероятности $1 - \beta$ и α зависят от x^* как от параметра. Исключив x^* , можно получить РХ как функцию α .

РХ является исчерпывающей характеристикой системы, принимающей решения по правилу (1.3). РХ системы для нормальных апостериорных плотностей $f(x/h_2)$ и $f(x/h_1)$ и различных σ_1 и σ_2 показаны на рис. 2.2.

§ 1. Начало оптимальности

Сравнение апостериорных вероятностей гипотез для выбора одной из них привело к решающему правилу вида (1.3)

$$\lambda(x) \leq \lambda_0.$$

Правило (1.3) использует порог λ_0 отношения правдоподобия. Этот неожиданный результат близок к одной из основных гипотез, принадлежащих классической психофизике: гипотезе существования критического значения стимула x^* — порога ощущений. В соответствии с этой гипотезой реакция на раздражитель появляется, если $x \geq x^*$, и не появляется, если $x < x^*$.

Это решающее правило намного проще правила (1.3). При этом возникает интересный и важный вопрос: чем решающее правило (1.3) отличается от элементарного правила ($x \geq x^*$, $x < x^*$). На этот вопрос имеется вполне определенный ответ.

Оказывается, решающее правило (1.3) позволяет получить в некотором смысле лучший результат по сравнению с правилом ($x \geq x^*$, $x < x^*$). Для того чтобы в этом убедиться, достаточно рассмотреть задачу обнаружения сигнала для случая $\sigma_s < \sigma_n$, когда отношение правдоподобия не является монотонной функцией (рис. 3.1). Для этого следует вычислить $p(S/s)$ и $p(S/n)$ для этих двух решающих правил. Для решающего правила ($x \geq x^*$, $x < x^*$) $p(S/s)$ и $p(S/n)$ равны:

$$p(S/s) = \int_{x^*}^{\infty} f(x/s) dx, \quad p(S/n) = \int_{x^*}^{\infty} f(x/n) dx.$$

Для решающего правила (1.3) согласно (2.2), (2.5)

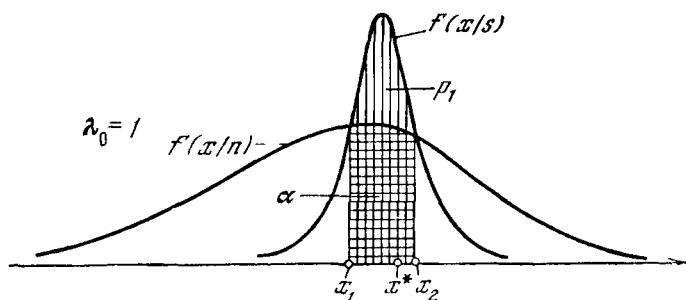
$$p_1(S/s) = \int_{\lambda(x) \geq \lambda_0} f(x/s) dx, \quad p_1(S/n) = \int_{\lambda(x) > \lambda_0} f(x/n) dn. \quad (3.1)$$

Сравнивая между собой p и p_1 , можно заметить, что для случая $\sigma_s < \sigma_n$ (немонотонная функция $\lambda(x)$ — рис. 2.2, I, III), и именно для него, решающее правило (1.3) дает лучший результат по сравнению с элементарным правилом ($x \geq x^*$, $x < x^*$). Это видно из рис. 3.1, где изображены апостериорные плотности $f(x/s)$ и $f(x/n)$ для случая $\sigma_s < \sigma_n$. В случае элементарного ре-

шающего правила вероятности $p(S/s)$ и $p(S/n)$ равны площади под кривыми $f(x/s)$ и $f(x/n)$ справа от линии $x = x^*$. С другой стороны, в соответствии с рис. 3.1 вероятности p_1 равны:

$$p_1(S/s) = \int_{x_1}^{x_2} f(x/s) dx, \quad p_1(S/n) = \int_{x_1}^{x_2} f(x/n) dx.$$

Из рис. 3.1 непосредственно видно, что $p_1(S/s) < p(S/s)$. Следовательно, решение, использующее отношение правдоподобия, может привести к лучшему результату по сравнению с элементарным решением, использующим порог x^* . Это достигается за счет того, что более общее правило $\lambda(x) \leq \lambda_0$ в случае $\sigma_s \leq \sigma_n$ эквивалентно «нескольким» порогам на оси x . На рис. 3.1 оно эквивалентно двум критическим значениям стимула: x_1 и x_2 . В общем случае может быть любое число значений $x_1, x_2, \dots, x_n$ на оси x .



Р и с. 3.1. Порог x^* значения стимула и порог λ_0 отношения правдоподобия

Таким образом, переход к шкале отношения правдоподобия приводит к лучшим решениям. Естественным теперь является вопрос о существовании в определенном смысле наилучших, т. е. оптимальных, решений.

Оказывается, решение (1.3), связанное с отношением правдоподобия, является в некотором смысле оптимальным. Важной особенностью решающего правила (1.3) является его универсальность, которую следует понимать в следующем смысле: при изменении в широких пределах требования критерия оптимальности решающее правило (1.3) отношения правдоподобия не изменяется.

Пример 3.1

Естественной является следующая оптимальная стратегия: максимизировать величину

$$R = p(H_2/h_2) - \gamma p(H_2/h_1),$$

где γ — некоторая постоянная. Ясно, что такая стратегия выгодна. Так, например, при $\gamma = 1$ она дает максимальную относительную вероятность правильного решения в пользу гипотезы H_2 (максимальный процент правильных ответов).

Параметр γ определяет относительный вес в критерии требований, касающихся вероятностей $p(H_2/h_2)$ и $p(H_2/h_1)$.

Рассмотрим, к какому решающему правилу приводит критерий максимума величины R . Обозначим через A множество дискретных значений x_i (пока неизвестное), которые приводят к принятию гипотезы H_2 . Тогда для вероятности $p(H_2/h_2)$ можно записать

$$p(H_2/h_2) = \sum_{x_i \in A} p(x_i/h_2),$$

где сумма в правой части распространяется на все x_i , входящие в A .

Аналогично для вероятности ошибки первого рода имеем

$$p(H_2/h_1) = \sum_{x_i \in A} p(x_i/h_1).$$

Для величины R можно записать

$$R = \sum_{x_i \in A} p(x_i/h_2) - \gamma \sum_{x_i \in A} p(x_i/h_1) = \sum_{x_i \in A} (p(x_i/h_2) - \gamma p(x_i/h_1)).$$

Величина R должна быть максимальной. Этого можно добиться, если множество A выбрать так, чтобы

$$p(x_i/h_2) - \gamma p(x_i/h_1) > 0, \quad x_i \in A.$$

Но вместе с тем A не должно включать те x_i , для которых

$$p(x_i/h_2) - \gamma p(x_i/h_1) < 0, \quad x_i \notin A.$$

При выполнении этих условий под знаком суммы в R имеются только положительные числа. Нетрудно заметить, что эти условия выполняются, если A выбрать из условия

$$\frac{p(x_i/h_2)}{p(x_i/h_1)} > \gamma.$$

Следовательно, гипотеза H_2 принимается тогда, когда отношение правдоподобия превышает порог γ . Таким образом, критерий $\max R$ приводит нас к правилу отношения правдоподобия.

§ 2. Критерий минимального риска

К понятию оптимальности можно прийти, если учесть стоимость различных решений. Эта стоимость, разумеется, должна быть известна наблюдателю из каких-либо предварительных наблюдений или общих соображений. Она относится к внешним данным задачи и не может быть получена при ее решении.

В случае простой альтернативы имеется четыре возможности, в соответствии с которыми можно ввести плату за различные решения:

c_{11} — цена за решение H_1 , когда имеет место h_1 , т. е. цена за правильное решение о состоянии h_1 ;

c_{12} — цена за решение H_1 , когда имеет место h_2 , т. е. цена за неправильное решение о состоянии h_2 ;

c_{21} — цена за решение H_2 , когда имеет место h_1 , т. е. цена за неправильное решение о состоянии h_1 ;

c_{22} — цена за решение H_2 , когда имеет место h_2 , т. е. цена за правильное решение о состоянии h_2 .

Можно ввести средние условные потери

$$r_1 = c_{11}(1 - \alpha) + c_{21}\alpha \quad \text{при } h_1, \quad (3.2a)$$

r_1 — средние условные потери (средний условный риск) за все решения при условии, что H_1 истинна. Первый член дает среднюю плату за правильное решение о h_1 , второй член дает среднюю плату за неправильное решение о h_1 . Нетрудно заметить, что (3.2a) есть условное математическое ожидание случайной величины со значениями c_{11} , c_{21} , которые проявляются с условными вероятностями $1 - \alpha$ и α соответственно. Аналогично определяется средние условные потери (риск) r_2 за решения, при которых гипотеза H_2 истинна:

$$r_2 = c_{12}\beta + c_{22}(1 - \beta) \quad \text{при } h_2. \quad (3.26)$$

Теперь можно вычислить средний риск, если известны априорные вероятности q_1 и q_2 состояний h_1 и h_2 :

$$R = q_1 r_1 + q_2 r_2. \quad (3.3)$$

На основании (3.2a) и (3.26) выражение (3.3) можно записать так:

$$R = q_1 c_{11} + q_2 c_{22} + q_1 (c_{21} - c_{11}) \alpha + q_2 (c_{12} - c_{22}) \beta. \quad (3.4)$$

Следует заметить, что величина среднего риска (3.3) может быть оценена только по результатам большого числа опытов. В каждом отдельном опыте величина риска является случайной и может сильно отличаться от R .

Обозначим:

$$c_{21} - c_{11} = c_\alpha > 0, \quad c_{12} - c_{22} = c_\beta > 0. \quad (3.5)$$

Эти величины можно считать положительными, так как стоимость ошибки должна быть больше стоимости правильного решения. На основании (3.5) выражение (3.3) принимает вид

$$R = q_1 c_{11} + q_2 c_{22} + q_1 c_\alpha \cdot \alpha + q_2 c_\beta \cdot \beta. \quad (3.6)$$

Теперь можно сформулировать критерий байесовой оптимальной стратегии. Он требует, чтобы средний риск R был минимален. Рассмотрим, к какому оптимальному правилу приведет критерий (3.6).

Необходимые выкладки содержатся в Приложении II.

Как показано в Приложении II, для того чтобы средний риск был минимален, необходимо, чтобы решения принимались в

соответствии со следующим решающим правилом:

$$\begin{aligned} \text{если } \lambda(x) < \lambda_0, \text{ принимаются } h_1; \\ \text{если } \lambda(x) \geq \lambda_0, \text{ принимаются } h_2. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Порог λ_0 определяется формулой

$$\lambda_0 = \frac{q_1 c_\alpha}{q_2 c_\beta} \quad (3.8)$$

и отношение правдоподобия $\lambda(x)$ определяется выражением

$$\lambda(x) = \frac{f(x/h_2)}{f(x/h_1)}. \quad (3.9)$$

Стратегия (3.7), где порог выбирается из (3.8), известна как байесовское оптимальное правило.

Таким образом, это оптимальное правило совпадает с ранее введенным решающим правилом: оно также состоит в сравнении отношения правдоподобия $\lambda(x)$ с порогом λ_0 .

Бейесовское правило имеет простой смысл. Используя (3.7) и (3.8), можно записать неравенство

$$q_1 c_\alpha f(x/h_1) \geq q_2 c_\beta f(x/h_2), \quad (3.10)$$

которое имеет место, когда делается решение в пользу гипотезы H_1 . Но условные плотности вероятности $f(x/h_1)$ и $f(x/h_2)$ можно представить в виде (см. Приложение I)

$$q_1 f(x/h_1) = f(h_1/x) f(x), \quad q_2 f(x/h_2) = f(h_2/x) f(x),$$

где $f(h_1/x)$, $f(h_2/x)$ — апостериорные вероятности гипотез h_1 и h_2 при условии, что сделано наблюдение x ; $f(x)$ — плотность вероятности наблюдаемой величины.

Учитывая эти выражения и (3.5), можно записать неравенство (3.10) в виде

$$(c_{21} - c_{11}) f(h_1/x) \geq (c_{12} - c_{22}) f(h_2/x)$$

или

$$c_{22} f(h_2/x) + c_{21} f(h_1/x) \geq c_{11} f(h_1/x) + c_{12} f(h_2/x).$$

Но в последнем неравенстве справа и слева записаны условные риски

$$c(H_1/x) = c_{11} f(h_1/x) + c_{12} f(h_2/x)$$

и

$$c(H_2/x) = c_{22} f(h_2/x) + c_{21} f(h_1/x)$$

гипотез H_1 и H_2 при условии, что сделано наблюдение x .

Таким образом, бейесовская оптимальная стратегия предписывает выбирать ту гипотезу, для которой средний условный риск при данном наблюдении оказывается наименьшим (не следует путать средние условные риски $c(H_1/x)$ и $c(H_2/x)$ при данном наблюдении x со средними рисками r_1 (3.1) и r_2 (3.2) при условии выбора гипотез h_1 и h_2).

Пример 3.2

Рассмотрим классификацию предметов на два класса — h_1 и h_2 — по признакам x и y , являющимся непрерывными величинами¹. Будем считать известными условные вероятности признаков

$$f(x, y/h_1) \text{ и } f(x, y/h_2)$$

в классах h_1 и h_2 . Тогда в качестве признака классификации можно выбрать функцию правдоподобия

$$\lambda(x, y) = \frac{f(x, y/h_2)}{f(x, y/h_1)}.$$

Выбрав значение λ_0 для классификации, будем использовать решающее правило (3.7)

$$\lambda(x, y) \leq \lambda_0.$$

При такой классификации будут совершаться случайные ошибки. Ошибки появляются из-за того, что области определения условных плотностей вероятностей $f(x, y/h_1)$ и $f(x, y/h_2)$ могут частично налагаться друг на друга. С другой стороны, правило $\lambda \geq \lambda_0$ разделяет область значений x, y на две непересекающиеся области — Γ_1 и Γ_2 . Область Γ_1 в плоскости (x, y) определяется условием $\lambda < \lambda_0$, область Γ_2 — условием $\lambda \geq \lambda_0$.

Таким образом, если $\lambda \geq \lambda_0$, то имеется некоторая вероятность того, что предмет будет отнесен к классу h_1 .

Вероятность ошибки второго рода равна

$$\beta = p(H_1/h_2) = \iint_{\Gamma_1} f(x, y/h_2) dx dy.$$

Вероятность ошибки первого рода равна

$$\alpha = p(H_2/h_1) = \iint_{\Gamma_2} f(x, y/h_1) dx dy.$$

Если области определения плотностей вероятностей $f(x, y/h_1)$ и $f(x, y/h_2)$ не накладываются друг на друга, то всегда можно так разделить плоскость (x, y) на области Γ_1 и Γ_2 , чтобы $\alpha = \beta = 0$.

Если признаки x, y могут принимать лишь дискретные значения $(x_1, y_1)(x_2, y_2) \dots (x_n, y_n)$, то можно составить таблицу значений признаков.

Сравнение отношения правдоподобия с порогом разбивает множество значений на два класса. Если появляется пара признаков, попадающая в отведенные квадраты, то предмет относится к первому классу. В противном случае он относится ко второму классу. В этом случае Γ_1 и Γ_2 являются конечными множествами признаков (x, y) .

¹ Например, x и y могут быть соответственно продольным и поперечным размерами предметов.

§ 3. Другие критерии

Следует заметить, что различные оптимальные критерии являются частными случаями байесова правила и получаются из него соответствующим выбором цен. При этом решающее правило (3.7) оказывается универсальным.

Рассмотрим некоторые критерии оптимальности.

Критерий Неймана — Пирсона. Критерий требует, чтобы при заданной величине α вероятности ошибки первого рода и величина ошибки второго рода были минимальны. Это требование можно записать в виде

$$\beta = \min \text{ при } \alpha = \alpha_0. \quad (3.11)$$

Критерий Неймана—Пирсона обычно используется, когда ошибка первого рода обходится значительно дороже ошибки второго рода и необходимо гарантировать заданный уровень α .

Если β является монотонной функцией α , то оптимальности как таковой нет. Просто, чем меньше α_0 , тем больше β , и наоборот. Для того чтобы понять, что критерий (3.11) приводит к решающему правилу типа (3.7), достаточно заметить, что условный минимум β достигается, если имеет минимум величина $y = \beta + \gamma\alpha$, где множитель γ определяется из условия $\alpha = \alpha_0$. Положив в (3.6) $c_{11} = c_{22} = 0$, $q_2 c_\beta = 1$, $q_1 c_\alpha = \gamma$, мы убеждаемся, что критерий Неймана—Пирсона является частным случаем байесовского критерия и, следовательно, минимум величины y достигается, когда используется решающее правило (3.7).

Критерий «идеальный наблюдатель». Критерий требует минимума величины

$$p = q_1 \alpha + q_2 \beta,$$

где $q_1 = p(h_1)$; $q_2 = p(h_2)$; $q_1 + q_2 = 1$; q_1, q_2 — априорные вероятности состояний h_1, h_2 .

Критерий «идеальный наблюдатель» предписывает минимизировать полную вероятность ошибки. Действительно, так как $\alpha = p(H_2/h_1)$, $\beta = p(H_1/h_2)$ есть условные вероятности, то

$$p = p(h_1)p(H_2/h_1) + p(h_2)p(H_1/h_2) = p(H_2, h_1) + p(H_1, h_2),$$

т. е. равна полной вероятности ошибки.

Для того чтобы заметить, что этот критерий также приводит к решающему правилу (3.7), достаточно положить в (3.6) $c_{11} = c_{22} = 0$, $c_{21} = c_{12} = 1$. Тогда байесовский критерий, использующий решающее правило (3.7), переходит в критерий «идеального наблюдателя».

Следовательно, минимум величины p также достигается, когда используется решающее правило (3.7). Правило отношения правдоподобия распространяется на сложные и многоальтернативные гипотезы. Эти вопросы рассматриваются в Приложении III.

В заключение полезно рассмотреть информационную интерпретацию решающего правила (3.7). Для монотонных $\lambda(x)$ и λ_0 сравнение λ с λ_0 эквивалентно сравнению $\varphi(x)$ с $\varphi(\lambda_0)$, где $\varphi(\cdot)$ — любая монотонная функция при $\lambda > 0$. В частности, можно положить $\varphi = \ln(\cdot)$. Тогда условие (3.7) примет вид:

если $\ln f(x/h_2) - \ln f(x/h_1) < \ln \lambda_0$, то принимается H_1 ;
 если $\ln f(x/h_2) - \ln f(x/h_1) > \ln \lambda_0$, то принимается H_2 .

Согласно основному положению теории информации величина $\ln f(x/h_i)$ определяет неопределенность, связанную с гипотезой h_i . Следовательно, правило (3.7) предписывает выбирать ту гипотезу, неопределенность которой меньше.

Пример 3.3.

Пусть имеется выборка, состоящая из k независимых нормальных величин. Причем известно, что распределение этих величин может быть двух типов: либо $N(0, \sigma)$, либо $N(m_2, \sigma)$. Априорная вероятность появления величин с $m = 0$ равна q_0 , и априорная вероятность появления величин с $m \neq 0$ равна q_1 . Задача состоит в том, чтобы по выборке из k величин $x_1, x_2, \dots, x_k$ решить, из какого распределения сделана выборка.

Другая интерпретация задачи состоит в том, что нужно проверить гипотезу о наличии ($m \neq 0$) или отсутствии ($m = 0$) сигнала по наблюдениям сигнала в шуме. Для принятия оптимального решения используем байесовскую стратегию. Рассмотрим вначале случай одного наблюдения x .

Имеем:

$$\lambda(x) = \frac{\exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]}{\exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right]} = \exp\left[\sigma^{-2}\left(mx - \frac{m^2}{2}\right)\right],$$

$$\lambda_0 = \frac{q_0 c_\alpha}{q_1 c_\beta}.$$

Уравнение разделяющей границы определяется условием

$$\lambda(x) = \lambda_0.$$

В данном случае областью Γ является отрезок и граница есть точка x^* с координатой, определяемой указанным уравнением. Логарифмируя уравнение и определяя x^* , имеем

$$x^* = \frac{m}{2} + \frac{\sigma^2}{m} \ln \lambda_0.$$

При $\lambda(x) < \lambda_0$ имеет место $x < \frac{m}{2} + \frac{\sigma^2}{m} \ln \lambda_0$, а при $\lambda(x) \geq \lambda_0 - x_1 \geq \frac{m}{2} + \frac{\sigma^2}{m} \ln \lambda_0$.

Области Γ_0 и Γ_1 представляются отрезками прямой, расположенными справа и слева от точки x^* (рис. 3.2).

Для вероятности ошибки первого рода имеем

$$\alpha = p(x \geq x^*/0),$$

$$\alpha = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{x^*}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx = \operatorname{erfc}\left(\frac{x^*}{\sigma}\right). \quad (3.12)$$

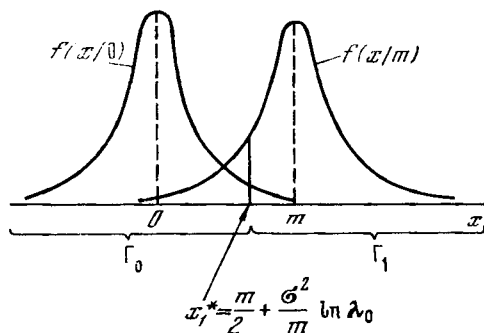
Для вероятности ошибки второго рода имеем

$$\beta = p(x < x^*/m),$$

$$\beta = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x^*} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right] dx = 1 - \operatorname{erfc}\left(\frac{x^* - m}{\sigma}\right), \quad (3.13)$$

$$\operatorname{erfc} x = (2\pi)^{-1/2} \int_x^{\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt.$$

Теперь можно возвратиться к эквивалентности стратегии Неймана—Пирсона байесовской стратегии. Действительно, для того чтобы использовать стратегию Неймана—Пирсона в этом примере, следует задать $\alpha = \alpha_0$ и из уравнения (3.12) определить порог x^* . Далее, подставив x^* в уравнение (3.13), мы определим значение β (α_0), которое в данном случае является минимальным.



Р и с. 3.2. Порог x^* на оси стимула

Рассмотрим теперь применение байесовской стратегии в случае двух наблюдений: $x_1 x_2$.

Тогда (см. Приложение I), если $x_1 x_2$ — независимые наблюдения,

$$\lambda(x_1 x_2) = \frac{f(x_1 x_2/m)}{f(x_1 x_2/0)} = \frac{\exp\left[-\frac{(x_1 - m)^2}{2\sigma^2} - \frac{x_2 - m}{2\sigma^2}\right]}{\exp\left[\frac{1}{2\sigma^2}(-x_1^2 - x_2^2)\right]}$$

или

$$\lambda(x_1 x_2) = \exp \frac{mx_1 + mx_2 - m^2}{\sigma^2}.$$

Логарифмируя, получим

$$x_1 + x_2 = m + \frac{\sigma^2}{m} \ln \lambda_0.$$

Это — уравнение разделяющей прямой в плоскости (x_1, x_2) .
В частности, если положить

$$U = x_1 + x_2 - m - \frac{\sigma^2}{m} \ln \lambda_0,$$

то будем иметь следующее решающее правило:

если $U < 0$, то принимается H_0 ;

если $U \geq 0$, то принимается H_1 .

Так как x_1 и x_2 — нормальные величины, то U тоже нормальная величина и ее математическое ожидание и дисперсия легко определяются из приведенного выше выражения для U . Теперь можно определить вероятности ошибок первого и второго родов:

$$\alpha = p(U \geq 0 / m_1 = m_2 = 0) = \operatorname{erfc} \left(-\frac{m}{\sigma \sqrt{2}} - \frac{\sigma}{m \sqrt{2}} \ln \lambda_0 \right),$$

$$\beta = p(U < 0 / m_1 = m_2 = m) = 1 - \operatorname{erfc} \left(\frac{m}{\sqrt{2} \sigma} + \frac{\sigma}{m \sqrt{2}} \ln \lambda_0 \right).$$

Геометрически это изображено на рис. 3.3.

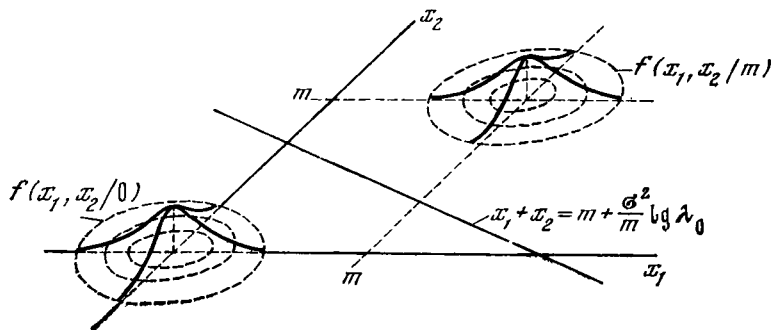


Рис. 3.3. Разделяющая граница в плоскости $x_1 O x_2$

В случае наблюдения k независимых переменных также можно показать, что уравнение разделяющей поверхности есть

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = \frac{km}{2} + \frac{\sigma^2}{m} \ln \lambda_0.$$

Разделяющей поверхностью является гиперплоскость в k -мерном пространстве. Если положить

$$U = \sum_{i=1}^k x_i - \frac{km}{2} - \frac{\sigma^2}{m} \ln \lambda_0, \quad \text{то } U < 0 - H_0, \quad U \geq 0 - H_1.$$

Условные плотности вероятности случайной величины U представлены на рис. 3.4.

Для ошибок первого и второго родов имеем выражения:

$$\alpha = \operatorname{erfc} \left(-\frac{m \sqrt{k}}{\sigma_2 \sqrt{2}} - \frac{\sigma}{2 \sqrt{k} \sqrt{2}} \ln \lambda_0 \right),$$

$$\beta = 1 - \operatorname{erfc} \left(\frac{m \sqrt{k}}{\sigma_2 \sqrt{2}} - \frac{\sigma}{2 \sqrt{k} \sqrt{2}} \ln \lambda_0 \right).$$

Из последнего уравнения следует, что если $x_1, x_2, \dots, x_k$ взаимно независимы, то при $k \rightarrow \infty$ $\alpha, \beta \rightarrow 0$.

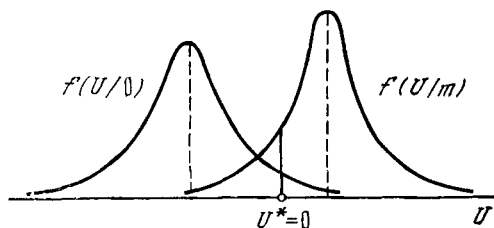


Рис. 3.4. Порог σ^*

Этот результат следовало ожидать, так как в этом случае ситуация становится все более определенной.

В симметричном случае $q_0 = q_1 = 1/2$, $c_\alpha = c_\beta$, $\ln \lambda_0 = 0$ и, следовательно, $\alpha = \beta$. В общем случае разделяющая поверхность не является гиперплоскостью. Из уравнения этой поверхности видно, что плотность вероятности $f(x/h_i)$ ($i = 1, 2, \dots$) должна обладать специальной симметрией, чтобы разделяющая граница была гиперплоскостью. Так, разделяющая граница $f(x_1 x_2 / 0) = f(x_1 x_2 / m)$ будет прямой только при $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЯ В НЕЙРОННЫХ СИСТЕМАХ

§ 1. Основные схемы психофизических экспериментов

Чтобы применить статистическую теорию решений к описанию некоторых аспектов поведения в рамках исследования «стимул — реакция», необходимо решить две проблемы:

1) найти способ сравнения предсказаний теории статистических решений с экспериментом;

2) ответить на вопрос «Что есть что?»

Это означает, что нужно дать психофизическую интерпретацию основных понятий теории принятия решений, таких, как решающее правило, критерий, порог и т. д.

Четвертая и пятая главы посвящены первой из названных проблем. Ответ на второй вопрос частично содержится в шестой главе, где рассматривается теория порога. В частности, анализ различных теорий порога на основе понятий статистических решений позволяет вложить психофизическое содержание в некоторые формальные понятия теории обнаружения. Способ экспериментального подтверждения любой теории является, как известно, одной из самых трудных задач науки вообще и данной теории в частности. Необходимо предположить различные экспериментальные схемы для проверки предсказаний теории с различных точек зрения. В частности, применительно к теории принятия решений следует рассмотреть основные схемы экспериментов в психофизике. Мы остановимся на трех таких схемах.

1. Двухальтернативная схема с одним интервалом наблюдения¹. Опыт проводится по следующей схеме (рис. 4.1). В интервале наблюдения подается стимул (например, полезный сигнал в шуме). Теория статистических решений применяется к задаче обнаружения полезного сигнала в шуме. Здесь оказывается применимой двухальтернативная схема. Например, полезным сигналом может быть чистый звуковой тон

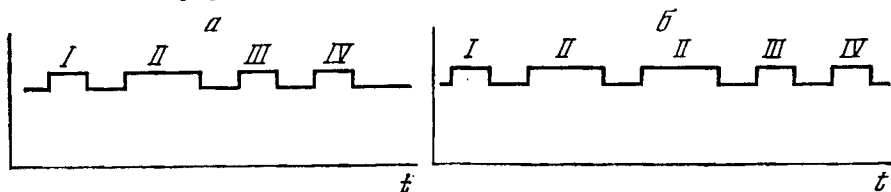
$$s(t) = A \sin \omega t. \quad (4.1)$$

Интервал наблюдения обычно известен для наблюдателя. Однако такая ситуация явно искусственна, так как в реальных ус-

¹ Двухальтернативная схема опытов в одном интервале еще называется схемой «да — нет» (Yes — No).

ловиях редко известен интервал, в котором появляется или отсутствует сигнал.

В частном случае сигнал в шуме две альтернативы удобно обозначить s и n , где s — присутствие сигнала в шуме (signal) и n — отсутствие полезного сигнала, т. е. имеется один шум (noise). В интервале ответа наблюдатель сообщает свое решение о выборе той или иной гипотезы. Применительно к случаю s и n его ответы будут S и N . В случае простой альтернативы никаких



Р и с. 4.1. Схемы опытов с одним (а) и двумя (б) интервалами стимулирования

I — интервал ожидания; II — интервал стимулирования; III — интервал наблюдения реакции; IV — интервал обратной связи

других ответов быть не может. Неопределенные ответы не допускаются.

Часто имеется подкрепление, которое появляется в интервале обратной связи.

2. Двухальтернативная схема с двумя интервалами стимулирования (two alternative forced-choice или 2AFC) ¹.

Сигнал обязательно появляется в одном из интервалов наблюдения (полная система событий), и наблюдатель вынужден выбирать один из них. Схема с принудительным выбором отличается от схемы «да — нет» более чем одним интервалом наблюдения. Картина как бы развертывается во времени. Последовательность событий в этой схеме представлена на рис. 4.1, б. Если речь идет о проверке гипотезы наличия сигнала в шуме, то удобно ввести следующее обозначение для событий: sn — для появления полезного сигнала в первом интервале (во втором — интервал шума), ns — для появления полезного сигнала во втором интервале, тогда в первом появляется один шум.

3. Многоальтернативный случай. Обе вышеприведенные схемы могут быть распространены на случай m альтернатив. Тогда в первом случае возможно появление m значений сигнала в одном интервале наблюдения или появление только шума. Во втором случае сигнал может появиться в одном из m интервалов.

Можно предложить различные способы сравнения теории статистических решений с экспериментом. При этом правдоподобно предположение об универсальности решающего правила. Действительно, мы показали (глава 3), что различные критерии при-

¹ Двухальтернативная схема с двумя интервалами стимулирования называется еще схемой с принудительным выбором.

водят к одному и тому же решающему правилу: сравнение отношения правдоподобия λ с порогом λ_0 . Имея в виду универсальность решающего правила, можно предположить, что наблюдатель использует это решающее правило. Разумеется, нельзя считать такое предположение истинным. Оно является лишь правдоподобным. Однако остается одна принципиальная трудность, которую нужно преодолеть: необходимо указать способ оценки порога λ_0 , которым пользуется наблюдатель. Когда, например, конструируется приемник для принятия оптимального решения, то не возникает никаких трудностей при определении порога. Зная цены и априорные вероятности, можно определить значение порога, пользуясь формулой (3.9) для байесовской стратегии. Когда мы имеем дело с нейронной системой, то ситуация становится совсем иной. Если даже принять, что решающее правило есть правило отношения правдоподобия, то остается совершенно неясным, какое значение порога используется этой системой. Формула (3.9), очевидно, уже неприменима, так как неясно, какие цены формируются у системы на основании инструкций, даваемых ей экспериментатором. От нас ускользает механизм формирования цен за правильные и неправильные решения на основании информации, поступающей из внешней среды.

Такой механизм, очевидно, имеется во всякой нейронной системе. Существует замечательная характеристика процесса решения, позволяющая экспериментально определить порог, который использует система. Это открывает принципиально новые возможности для проверки теории и вообще для исследования нейронных систем. Такой характеристикой является рассмотренная во второй главе РХ процесса решения.

§ 2. Свойства рабочей характеристики

Как уже известно, РХ имеет универсальное значение.

Если наблюдатель использует для принятия решений отношение правдоподобия, но порог выбирает неоптимальным, то он применяет неоптимальную стратегию (для данных условий). В этом случае РХ может также использоваться для описания процесса решения.

Дальше исследуются основные свойства РХ. Как уже указывалось, РХ процесса решения называется функция

$$p(H_2/h_2) \equiv P(\alpha), \quad (4.2)$$

определяющая зависимость вероятности правильного решения относительно гипотезы H_2 от вероятности ошибки первого рода α . Известно, что нельзя одновременно добиться малости α и β . Поэтому функция $P(\alpha)$ увеличивается и убывает вместе с α (рис. 4.2).

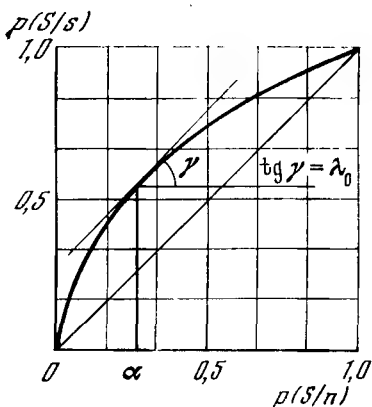
Применительно к задаче обнаружения сигнала s в шуме $s + n$ за состояние h_1 следует принять наличие одного шума, а за состояние h_2 — наличие полезного сигнала в шуме. Тогда

$$p(H_2/h_2) = p(S/s) \quad (4.3)$$

и

$$p(H_2/h_1) = p(S/n) = \alpha, \quad (4.4)$$

где $p(S/s)$ — вероятность правильного решения о наличии сигнала (вероятность «попадания»); $p(S/n)$ — вероятность неправильного решения о наличии сигнала (вероятность «ложной» тревоги).



Р и с. 4.2. Порог λ_0 на РХ

Рассмотрим основные свойства кривой $P(\alpha)$. Отношение правдоподобия $\lambda(x)$, если x — случайная величина, само является случайной величиной. Обозначим ее апостериорные плотности вероятности при состояниях s и n через $g(\lambda/s)$ и $g(\lambda/n)$ соответственно. Пусть $f(x/s)$ и $f(x/n)$ являются апостериорными плотностями вероятности сигнала при наличии полезного сигнала или одного шума n . Тогда можно заметить,

что имеют место соотношения (см. Приложение I)

$$g(\lambda/s) d\lambda = f(x/s) dx, \quad (4.5)$$

$$g(\lambda/n) d\lambda = f(x/n) dx. \quad (4.6)$$

Из (4.5), (4.6) следует интересное свойство функции правдоподобия. Имеем

$$\lambda(\lambda) = \frac{g(\lambda/s)}{g(\lambda/n)} = \frac{f(x/s)}{f(x/n)} = \lambda(x). \quad (4.7)$$

Последнее соотношение означает следующее. Отношение правдоподобия $\lambda(x)$, когда x является случайной величиной, также является случайной величиной. Поэтому можно вычислить отношение правдоподобия $\lambda(\lambda)$ величины λ . Функция $\lambda(\lambda)$ равна отношению условных плотностей $g(\lambda/s)$ и $g(\lambda/n)$ случайной величины λ (4.7). Тогда оказывается, что $\lambda[\lambda(x)] = \lambda(x)$. Таким образом, функция $\lambda(x)$ инвариантна по отношению к преобразованию $\lambda[\cdot]$.

Найдем вероятности $P(\alpha)$ и α , используя апостериорные плотности вероятности (4.5), (4.6). Из определения вероятностей $P(\alpha)$ и α имеем

$$P(\alpha) = p(S/s) = \int_{\lambda_0}^{\infty} g(\lambda/s) d\lambda, \quad (4.8)$$

$$\alpha = p(S/n) = \int_{\lambda_0}^{\infty} g(\lambda/n) d\lambda, \quad (4.9)$$

где λ_0 — порог, при котором принималось решение.

Соотношения (4.8) и (4.9) задают в параметрической форме функцию $P(\alpha)$. Из (4.8) и (4.9) имеем

$$\frac{dP(\alpha)}{d\alpha} = \frac{dP(\alpha)/d\lambda_0}{d\alpha/d\lambda_0} = \frac{g(\lambda_0/s)}{g(\lambda_0/n)}. \quad (4.10)$$

Согласно (4.5) и (4.6)

$$\frac{g(\lambda_0/s)}{g(\lambda_0/n)} = \frac{f(x^*/s)}{f(x^*/n)} = \lambda_0(x^*). \quad (4.11)$$

Так как для $x = x^*$

$$\lambda(x^*) = \lambda_0, \quad (4.12)$$

то, учитывая (4.11) и (4.12), уравнение (4.10) можно записать в виде

$$dP(\alpha)/d\alpha = \lambda_0. \quad (4.13)$$

Таким образом, производная функции $P(\alpha)$ равна порогу λ_0 или порог наблюдателя при величине вероятности ложной тревоги α равен углу наклона касательной к кривой $P(\alpha)$ в точке α (рис 4.2).

Уравнение (4.13) является соотношением фундаментальной важности, так как оно позволяет экспериментально установить субъективный порог наблюдателя. Для этого нужно построить рабочую характеристику $P(\alpha)$ для различных α . Различных α добиваются, изменяя априорные вероятности полезного сигнала или инструкции, даваемые наблюдателю. При этом, как показывает эксперимент, изменяется порог λ_0 , при котором принимается решение, а следовательно, и величины α . В случае оптимальной байесовской стратегии зависимость λ_0 от априорных вероятностей и цен определяется формулой (3.9). Таким образом, мы получаем способ сравнения теории с экспериментом. Действительно, определяя отношение правдоподобия (теоретически или экспериментально), наблюдая сигнал x при состояниях s и n и определив по РХ порог λ_0 , мы в состоянии проверить, следует ли наблюдатель указанному правилу принятия решения или нет.

Таков ответ на первый вопрос, поставленный в начале главы.

Ввиду важности РХ для всей теории рассмотрим другие ее свойства. Полезно построить РХ для случая гауссовских плотностей вероятности $f(x/s)$ и $f(x/n)$. Для этого случая имеем

$$f(x/s) = (2\pi D)^{-1/2} \exp \left[-\frac{(x - m_s)^2}{2D} \right],$$

$$f(x/n) = (2\pi D)^{-1/2} \exp \left[-\frac{(x - m_n)^2}{2D} \right].$$

Для вероятностей $p(S/s)$ и α на основании (2.2), (2.3) можно записать равенства (3.1). В случае, когда $\lambda(x)$ — монотонная функция и апостериорные плотности являются нормальными, равенства (3.1) принимают вид

$$p(S/s) = \int_{x^*}^{\infty} f(x/s) dx = \operatorname{erfc}\left(\frac{x^* - m_s}{\sigma}\right), \quad (4.14)$$

$$p(S/n) = \int_{x^*}^{\infty} f(x/n) dx = \operatorname{erfc}\left(\frac{x^* - m_n}{\sigma}\right), \quad (4.15)$$

где

$$\operatorname{erfc} x = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Уравнения (4.14), (4.15) являются параметрическими уравнениями РХ. Параметром служит величина x^* . Так как имеются таблицы функции $\operatorname{erfc} x$, то РХ для нормальных апостериорных плотностей может быть легко получена.

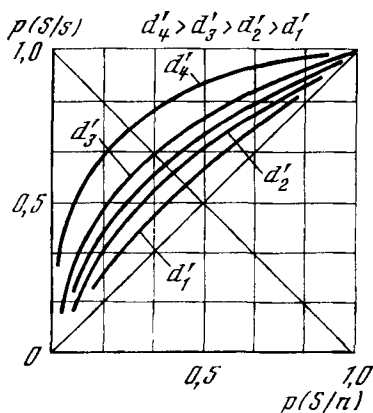


Рис. 4.3. РХ для разных значений d'

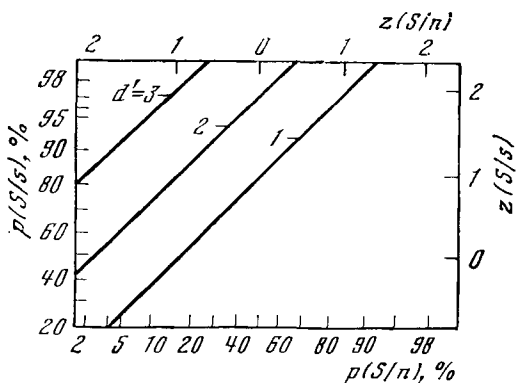


Рис. 4.4. РХ в вероятностном масштабе

Рабочая характеристика для гауссовского случая, когда $\sigma_s = \sigma_n = \sigma$, приведена на рис. 4.3. Чем больше разность $d' = (m_s - m_n)/\sigma$, тем бóльшая вероятность правильного обнаружения сигнала z при заданной величине α . Этот вывод очевиден, так как при увеличении d' должна увеличиться относительная амплитуда полезного сигнала и его легче обнаружить в шуме. Для монотонной функции $\lambda(x)$ каждой точке x кривой $\lambda(x)$ соответствует одно значение порога λ и наоборот. Поэтому значения x могут быть нанесены на РХ. Значению $x = 0$ соответствует точка на пересечении отрицательной диагонали с РХ (касательная в этой точке параллельна биссектрисе угла первого квадранта).

Малым значениям соответствует верхняя ветвь кривой $P(\alpha)$, а большим — левая нижняя ветвь.

Если $\sigma_s \neq \sigma_n$, то отношение правдоподобия $\lambda(x)$ может не быть монотонной функцией x . В этом случае РХ имеют вид, показанный на рис. 2.2 для $\sigma_s/\sigma_n \geq 1$, $\sigma_s/\sigma_n < 1$. Как указывалось, чтобы отдать предпочтение шкале λ или шкале x , необходимо установить монотонный характер функции $\lambda(x)$. Это можно сделать, пользуясь РХ. Однако требуются тщательный анализ РХ и определенные навыки в обработке статистического материала. Так, например, если площадь под кривой $P(\alpha)$ равна 0,75 и $\sigma_s = 2\sigma_n$, то в правом верхнем углу в интервале $P(\alpha) = 0,96 \div 1$ наблюдается быстрое возрастание кривой $P(\alpha)$. Чтобы экспериментально обнаружить такое возрастание, требуется очень большая точность эксперимента. С другой стороны, если $\sigma_s = (4 \div 10)\sigma_n$, то соответствующая РХ мало отличается от РХ для $\sigma_s = \sigma_n$, поэтому экспериментальная проверка этого случая также представляет известные трудности.

Рассмотрим дальнейшие свойства РХ, важные для экспериментальной проверки теории принятия решений. Анализ и сравнение РХ удобно проводить в вероятностном масштабе. Для перехода к вероятностному масштабу нужно пользоваться уравнением¹

$$p(S/s) = \Phi[z(S/s)]. \quad (4.16)$$

Для каждого значения вероятности $p(S/s)$ вычисляется соответствующая ему величина z .

Таким образом, получаются две новые величины: $z(S/s)$, соответствующая вероятности $p(S/s)$, и $z(S/n)$, соответствующая вероятности $p(S/n)$ (вероятность ошибки первого рода или вероятность ложной тревоги). После чего $z(S/n)$ рассматривается как функция величины $p(S/n)$. Преимущество перехода от $p(S/s)$ и $p(S/n)$ к $z(S/s)$ и $z(S/n)$ связано с линейностью $z(S/s)$ как функции $z(S/n)$ для нормальных апостериорных плотностей. Рабочие характеристики в вероятностном методе приведены на рис. 4.4.

В линейном характере РХ в этом случае можно убедиться следующим способом. Вычислим $p(S/s)$ для значения порога x^* . На основании (4.14) и (4.16) имеем

$$z(S/s) = - \frac{x^* - m_s}{\sigma_s}. \quad (4.17)$$

Аналогично на основании (4.15), (4.16) для $z(S/n)$ можно записать

$$z(S/n) = \frac{x^* - m_n}{\sigma_n}. \quad (4.18)$$

¹ В (4.16) $\Phi(z)$ — функция Лапласа. В конце книги имеются таблицы функции $\Phi(z)$. Ранее введенная в (4.14) и (4.15) функция $\operatorname{erfc} x$ связана с $\Phi(z)$ соотношением $\operatorname{erfc} x = \Phi(-x)$.

Исключая из (4.17) и (4.18) параметр x^* , получаем

$$z(S/s) = \frac{\sigma_n}{\sigma_s} z(S/n) + \frac{m_s - m_n}{\sigma_s}. \quad (4.19)$$

Таким образом, $z(S/s)$ является действительно линейной функцией $z(S/n)$ с угловым коэффициентом σ_n/σ_s и смещением $(m_s - m_n)/\sigma_s$. При $\sigma_s = \sigma_n = \sigma$ все прямые имеют наклон 45° . Тогда функция $z(S/s)$ зависит от одного параметра. Используя уже известный параметр d' , можно записать уравнение (4.19) в виде

$$z(S/s) = z(S/n) + d'. \quad (4.20)$$

По РХ, построенной в вероятностном масштабе (рис. 4.4), легко оценивать параметры σ_n , σ_s , d' . Величина σ_n/σ_s является угловым коэффициентом прямой (4.20). Для оценки d' достаточно найти разность

$$z(S/s) - z(S/n) = d'.$$

Так, например, если $p(S/s) = 0,98$ и $p(S/n) = 0,16$, то соответствующее этим вероятностям значение -1 можно определить на шкале $z(S/n)$ (рис. 4.4). Значение $z(S/s)$, соответствующее вероятности $p(S/s) = 0,98$, равно 2. Тогда $d' = 2 - (-1) = 3$. Наконец, следует заметить, что представление РХ в вероятностном масштабе позволяет проверить нормальность апостериорных плотностей вероятностей $f(x/s)$ и $f(x/n)$ ¹. Для этого достаточно убедиться в линейности характеристики $z(S/s)$.

§ 3. Рабочая характеристика в опытах с двумя интервалами стимулирования

Рассмотрим теперь РХ применительно ко второй схеме опыта, в котором эксперимент проводится с двумя интервалами наблюдения. В схеме опыта с двумя интервалами стимулирования появление сигнала $s+n$ в первом интервале и сигнала n во втором интервале будет обозначаться sn , а решение о выборе первого интервала — $R1$ (реакция появляется в первом интервале). Вероятность события $R1$ при условии sn , т. е. вероятность правильного решения (вероятность попадания), будет обозначаться $p(R1/sn)$.

Вероятность $p(R1/ns)$ выбора первого интервала, когда имеет место событие ns (появление сигнала n в первом интервале и появление сигнала $s+n$ во втором интервале), очевидно, есть вероятность неправильного решения, т. е. вероятность «ложной тревоги».

Две другие вероятности $p(R2/ns)$ и $p(R2/sn)$ связаны с вероятностями $p(R1/sn)$ и $p(R1/ns)$ соотношениями

$$p(R1/sn) = 1 - p(R2/sn), \quad p(R2/ns) = 1 - p(R1/ns).$$

¹ Линейные характеристики могут иметь также другие распределения.

Для определения функции правдоподобия $\lambda(x_1, x_2)$, которая в этом опыте зависит от двух значений, x_1, x_2 , сигнала x соответственно в первом и втором интервалах наблюдения, необходимо иметь две условные плотности вероятности — $f(x_1, x_2/sn)$ и $f(x_1, x_2/ns)$.

Тогда

$$\lambda(x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2/sn)}{f(x_1, x_2/ns)}.$$

Для случая нормальных апостериорных плотностей $f(x_1, x_2/sn)$ и $f(x_1, x_2/ns)$ (Приложение I) функция $\lambda(x_1, x_2)$ имеет вид

$$\lambda(x_1, x_2) = \frac{\exp \left\{ -\frac{1}{2(1-r^2)} \left[\left(\frac{x_1 - m_s}{\sigma_s} \right)^2 - 2r \left(\frac{x_1 - m_s}{\sigma_s} \right) \left(\frac{x_2 - m_n}{\sigma_n} \right) + \left(\frac{x_2 - m_n}{\sigma_n} \right)^2 \right] \right\}}{\exp \left\{ -\frac{1}{2(1-r^2)} \left[\left(\frac{x_1 - m_n}{\sigma_n} \right)^2 - 2r \left(\frac{x_1 - m_n}{\sigma_n} \right) \left(\frac{x_2 - m_s}{\sigma_s} \right) + \left(\frac{x_2 - m_s}{\sigma_s} \right)^2 \right] \right\}},$$

где $m_s, m_n, \sigma_s, \sigma_n$ — математические ожидания и среднеквадратичные значения величин x_1 и x_2 соответственно; r — коэффициент корреляции величин x_1 и x_2 .

Параметры плотностей вероятности m_s, m_n, σ_s и σ_n зависят только от состояния s и n и не зависят от их порядка во времени.

Если $m_s - m_n < 0$ и $r < 0$, то обнаружение оказывается менее эффективным по сравнению со случаем некоррелированных x_1, x_2 , так как в этом случае $\ln \lambda(x_1, x_2)$ имеет меньшую величину из-за большего значения знаменателя $1 - r$.

Если $r = 0$, то отношение правдоподобия будет монотонной функцией разности $x_1 - x_2$. В этом случае $\lambda(x_1 - x_2)$ равно отношению апостериорных плотностей $f(u/sn)$ и $f(u/ns)$, где $u = x_1 - x_2$.

Если x_1 и x_2 — нормальные независимые величины, то и разность их — также нормальная величина с параметрами Δm и $\sigma_1 = \sqrt{\sigma_s^2 + \sigma_n^2}$. Если имеет место событие sn , то

$$\Delta m = M(x_1 - x_2) = m_s - m_n,$$

$$D_1(x_1 - x_2) = D(x_1) + D(x_2) = 2\sigma^2,$$

при этом предполагается, что $\sigma_s = \sigma_n = \sigma$.

Если имеет место событие ns , то

$$-\Delta m = M(x_1 - x_2) = m_n - m_s, \quad D_1(x_1 - x_2) = 2\sigma^2.$$

Апостериорные плотности вероятности принимают вид

$$f(u/sn) = (2\pi\sigma_1^2)^{-\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{(u - \Delta m)^2}{2\sigma_1^2} \right],$$

$$f(u/ns) = (2\pi\sigma_1^2)^{-\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{(u + \Delta m)^2}{2\sigma_1^2} \right].$$

Для вероятностей попадания и ложной тревоги получаются следующие выражения:

$$p(R1/sn) = \int_{x^*}^{\infty} f(u/sn) du = \operatorname{erfc} \left(\frac{x^* - \Delta m}{\sigma_1} \right),$$

$$p(R1/ns) = \int_{x^*}^{\infty} f(u/ns) du = \operatorname{erfc} \left(\frac{x^* + \Delta m}{\sigma_1} \right), \quad \text{где } \sigma_1^2 = 2\sigma^2,$$

или $p(R1/sn) = \operatorname{erfc}(x - \tilde{d}')$, $p(R1/ns) = \operatorname{erfc} x$, где

$$x = \frac{x^* + \Delta m}{\sigma_1}, \quad \tilde{d}' = 2 \frac{\Delta m}{\sigma_1} = \sqrt{2} d'.$$

Таким образом, в частном случае независимых симметричных наблюдений ($\zeta_s = \sigma_n$) в двух интервалах описание схемы с принудительным выбором совпадает с описанием схемы типа «да — нет». Различие будет лишь в выборе параметра d' , который в $\sqrt{2}$ раз больше значения d' в схеме «да — нет».

Пусть наблюдатель выбирает интервал, в котором отношение правдоподобия имеет большую относительную величину (по отношению к значению λ в другом интервале), и пусть случайные величины λ_s при наличии сигнала и λ_n при наличии одного шума независимы. Если выборке из $s + n$ соответствует величина λ_s , большая, чем λ_n при выборке n , то выбор наблюдателем первого интервала будет правильным решением. Тогда для вероятности правильного ответа c при пороге λ_0 можно по теореме умножения записать

$$p_{\lambda_0}(R1/sn) = p_{\lambda_0}(c) = p(\lambda_s \geq \lambda_0) \cdot P(\lambda_n < \lambda_0), \quad (4.21)$$

так как правильный ответ является событием, равным произведению двух независимых событий: $\lambda_s \geq \lambda_0$ и $\lambda_n < \lambda_0$. Вероятность правильного ответа для любого порога можно получить по теореме сложения вероятностей. Так как вероятности $p(\lambda_s \geq \lambda_0)$ и $p(\lambda_n < \lambda_0)$ — непрерывные функции λ_0 , то вероятность $p_2(c)$ правильного ответа равна

$$p(R1/sn) = p_2(c) = \int p(\lambda \geq \lambda_0) p(\lambda_n < \lambda_0) d\lambda_0. \quad (4.22)$$

Далее имеет место равенство

$$p(\lambda_n < \lambda_0) = p_{\lambda_0}(N/n).$$

Действительно, $p(\lambda_n < \lambda_0)$ есть вероятность обнаружить шум, когда $s = 0$ при пороге λ_0 . Но эта вероятность является условной вероятностью $p_{\lambda_0}(N/n)$ гипотезы N о шуме, когда в действительности имеется один шум n ($s = 0$). Вероятность $p(\lambda_n < \lambda_0)$ можно выразить через вероятность противоположного события

$$p(\lambda_n < \lambda_0) = 1 - p_{\lambda_0}(S/n). \quad (4.23)$$

С другой стороны, для первой вероятности, стоящей под интегралом (4.22), имеем

$$p(\lambda_s \geq \lambda_0) = p_{\lambda_0}(S/s). \quad (4.24)$$

На основании (4.23) и (4.24) для вероятности (4.22) можно записать

$$p_2(c) = \int p_{\lambda_0}(S/s) [1 - p_{\lambda_0}(S/n)] d\lambda_0,$$

но $p_{\lambda_0}(S/s) d\lambda_0 - dp_{\lambda_0}(S/s)$ есть дифференциал вероятности $p_{\lambda_0}(S/s)$. Поэтому окончательно имеем

$$p_2(c) = \int_0^1 [1 - p_{\lambda_0}(S/n)] dp_{\lambda_0}(S/s). \quad (4.25)$$

Последняя формула позволяет интерпретировать $p_2(c)$ как площадь под РХ процесса решения, как это видно из рис. 4.5.

Произведение под интегралом определяет площадь элементарной полоски при пороге λ_0 (рис. 4.5). При этом, когда порог λ_0 изменяется в пределах от $-\infty$ до ∞ , дифференциал $dp_{\lambda_0}(S/s)$, как это следует из рисунка, изменяется в пределах от нуля до единицы. Поэтому пределы интегрирования $(-\infty, \infty)$ в (4.22) заменяются пределами 0 и 1 в (4.25).

Таким образом, мы получили еще одно важное свойство РХ, которое можно было бы назвать глобальным. Именно по виду РХ можно судить о «среднем» качестве процесса решения для данного наблюдателя. Чем больше площадь под РХ, тем лучше процесс решения, так как он обеспечивает больший процент правильных ответов. Если РХ совпадает с диагональю, то решения носят чисто случайный характер, так как число правильных ответов составляет лишь 50%.

Это важное свойство РХ сохраняется для m -альтернативной схемы. В этом случае сигнал может появиться в одном из m ин-

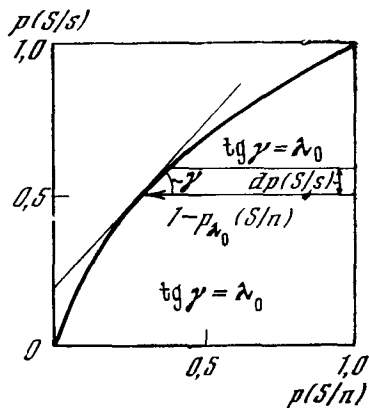


Рис. 4.5. РХ в опыте с двойным интервалом стимуляции

тервалов, в которых производятся наблюдения. В остальных $m - 1$ интервалах содержится один шум. Если наблюдения независимы, то рассуждения, аналогичные только что сделанным, приводят к следующему выражению для правильного ответа:

$$p_m(c) = \int_0^1 [1 - p_{\lambda_0}(S/n)]^{m-1} dp_{\lambda_0}(S/s).$$

До сих пор рассматривались независимые наблюдения при наличии сигнала и одного шума. Кроме того, предполагалось, что на решения не влияют смещения, связанные с различными ценами за правильные и неправильные решения.

Решение в случае m -альтернативной схемы принималось по максимальной величине отношения правдоподобия (симметрические задачи). Последнее ограничение легко устранить, если ввести цены. Раньше в случае двух интервалов наблюдатель выбирал интервал с большим значением $\lambda(x)$. Пусть теперь выбирается первый интервал, если отношение правдоподобия в первом интервале в c раз превышает отношение правдоподобия во втором интервале. Тогда вероятность правильного решения $R1$ (выбор первого интервала) равна

$$p_2(R1/sn) = \int p(\lambda_s \geq \lambda_0) p(\lambda_n < \lambda_0/c) d\lambda_0.$$

Эта формула получается аналогично (4.22). Далее, проделывая те же самые выкладки, что и для получения (4.25), имеем

$$p_2(R1/sn) = \int [1 - p_{\lambda_0|c}(s/n)] dp_{\lambda_0}(S/s)$$

или

$$p_2(R1/sn) = 1 - \int p_{\lambda_0|c}(s/n) dp_{\lambda_0}(S/s). \quad (4.26)$$

Вычисление $p(R1/sn)$ проводится аналогично уже вычисленной вероятности $p_2(c)$ для симметричного случая.

Если сигнал появляется во втором интервале (в первом интервале шум), то событие $R1$ обнаружения s в первом интервале имеет место, когда

$$\lambda_n > c\lambda_0 \text{ и } \lambda_s < \lambda_0.$$

Вероятность ошибочного решения равна

$$p_2(R1/ns) = \int p_{c\lambda_0}(S/n) dp_{\lambda_0}(S/s). \quad (4.27)$$

Вероятности $p(R1/sn)$ и $p(R1/ns)$ соответствуют вероятностям $p(S/s)$ и $p(S/n)$ для задачи с одним интервалом. Они полностью описывают поведение наблюдателя, так как две другие вероятности вычисляются из условия нормировки

$$p_2(R1/sn) + p_2(R2/sn) = 1, \quad p_2(R1/ns) + p_2(R2/ns) = 1. \quad (4.28)$$

Из уравнений (4.26) и (4.27) можно заметить, что координаты РХ в случае эксперимента с принудительным выбором в двойном интервале получаются интегрированием координат РХ для одного интервала.

Наконец, еще одним полезным свойством РХ в эксперименте с двумя интервалами является ее симметрия относительно диагонали с «отрицательным наклоном» («отрицательной диагонали»). Это свойство следует сразу из уравнений (4.28). Если кривая $y(x)$ симметрична относительно отрицательной диагонали, то между координатами точек $M(x, y)$ и $M_1(x_1, y_1)$, симметричных относительно «отрицательной диагонали», имеют место соотношения

$$y = 1 - x_1, \quad y_1 = 1 - x. \quad (4.29)$$

Положив

$$y = p(R1/sn), \quad y_1 = p(R2/ns), \quad x = p(R1/ns), \quad x_1 = p(R2/sn),$$

можно убедиться, что уравнения (4.28) удовлетворяют этому условию.

В случае одинаковых цен за ошибки при выборе первого или второго интервалов РХ симметрична для любых апостериорных плотностей $f(x/s)$ и $f(x/n)$.

Из уравнений (4.28) и (4.29) непосредственно получается соотношение между порогами λ_0 и λ_{01} в симметричных точках M и M_1 :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy}.$$

Учитывая (4.28), (4.29), можно записать предыдущее уравнение в виде

$$\frac{dp(R1/sn)}{dp(R1/ns)} = \left[\frac{dp(R2/ns)}{dp(R2/sn)} \right]^{-1}.$$

Последнее равенство равносильно следующему соотношению между порогами в точках M и M_1 :

$$\lambda_0 = 1/\lambda_{01}. \quad (4.30)$$

§ 4. Рабочие характеристики дискретных процессов

Дискретные случайные величины играют важную роль не только в физике и технике, но также в психофизике и физиологии. Это связано с формой сигналов отдельных нейронов или нейронных цепочек. Сигналы представляются последовательностью одинаковых импульсов. Полезная информация в таком сигнале передается частотой следования импульсов. Если полезный сигнал отсутствует, то имеется нерегулярная, случайная последовательность импульсов (фоновая активность нейрона). Такая последо-

вательность импульсов обычно хорошо описывается распределением Пуассона (см. ниже).

В связи с развитием микроэлектронной техники метод рабочих характеристик начал широко применяться для анализа отдельных нейронов и нейронных цепей. Поэтому здесь рассматривается построение РХ дискретных случайных величин (дискретных процессов), описываемых биномиальным, геометрическим распределениями, а также распределением Пуассона.

Простейшая и вместе с тем наиболее важная дискретная случайная величина связана с испытаниями Бернулли [10]. Проводится m независимых испытаний, в каждом из которых случайная величина X может принимать значение $x = 0$ с вероятностью p или значение $x = 1$ с вероятностью $q = 1 - p$.

Случайной величиной в k -м опыте является $X_k \in \{0, 1\}$. За случайную величину Y в m опытах принимается число появившихся единиц.

Последовательность испытаний Бернулли одновременно порождает «дискретный» случайный процесс. Выборочная функция такого процесса состоит из последовательности «нулей» и «единиц».

Очевидно,

$$Y = \sum_{k=1}^m X_k.$$

Величина Y может принимать значения $0, 1, 2, \dots, m$.

Вероятности значений величины Y определяются формулой

$$P(Y = n/m, p) = C_m^n p^n q^{m-n}, \quad (4.31)$$

где C_m^n — число сочетаний из m элементов по n , равное $C_m^n = m! / (n! (m - n)!)$

При задании биномиального распределения (4.31) необходимо знать число испытаний m и вероятность успеха p в каждом испытании. Эти величины указаны справа от черты под знаком вероятности в (4.31).

Для того чтобы понять, как определяются отношение правдоподобия и РХ дискретной случайной величины, удобно рассмотреть частный случай испытаний Бернулли, когда $m = 1$. Итак, имеется случайная величина X , принимающая значения 0 и 1 с вероятностями $p(0) = q$ и $p(1) = p$.

При построении РХ примем, что распределения $p(X/p_s)$ и $p(X/p_n)$ соответственно при наличии сигнала и шума определяются формулами

$$p(X/p_s) = \begin{cases} p_s & \text{при } x = 1, \\ q_s & \text{при } x = 0, \end{cases} \quad p(X/p_n) = \begin{cases} p_n & \text{при } x = 1, \\ q_n & \text{при } x = 0. \end{cases} \quad (4.32)$$

Отношение правдоподобия случайной величины X определяется уже известной формулой

$$\lambda(X) = p(X/p_s)/p(X/p_n). \quad (4.33)$$

Следовательно, $\lambda(x)$ имеет два значения:

$$\lambda(X) = \begin{cases} q_s/q_n & \text{при } x = 0, \\ p_s/p_n & \text{при } x = 1. \end{cases} \quad (4.34)$$

Отношение правдоподобия $\lambda(X)$ равно тангенсу угла наклона касательной к РХ. Отсюда следует, что РХ случайной величины

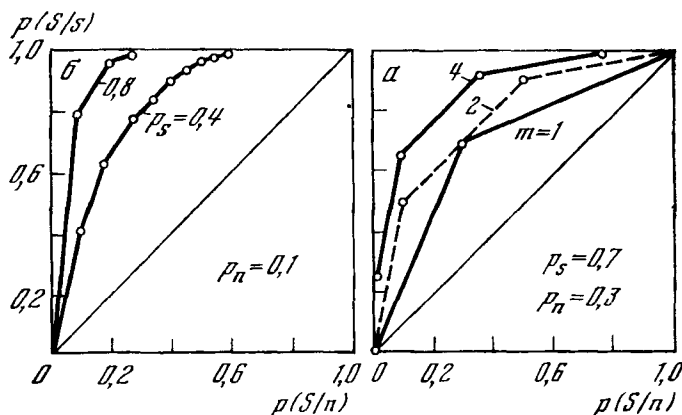


Рис. 4.6. РХ, относящиеся к схеме Бернулли

а — РХ для последовательности испытаний Бернулли; б — РХ для геометрического распределения

состоит из двух прямолинейных отрезков с наклонами p_s/p_n и q_s/q_n соответственно. Если к этому условию добавить непрерывность РХ, то этого оказывается достаточным для ее построения. РХ имеет вид

$$p(S/s) = \frac{p_s}{p_n} p(S/n) \quad \text{для } 0 < p(S/n) \leq p_n, \quad (4.35)$$

$$p(S/s) = \frac{q_s}{q_n} p(S/n) + \frac{p_s - p_n}{q_n} \quad \text{для } p_n < p(S/n) \leq 1.$$

РХ для $m = 1$, $p_s = 0,7$ и $p_n = 0,3$ показана на рис. 4.6, а.

Таким образом, РХ для дискретной случайной величины является непрерывной функцией, состоящей из прямолинейных отрезков. Число отрезков, составляющих РХ, равно числу значений отношения правдоподобия (4.34). В частности, на рис. 4.6, а РХ состоит из двух отрезков. РХ в общем случае имеет $k - 1$ угловую точку на интервале $(0, 1)$, где k — число возможных

значений функции $\lambda(x)$. На рис. 4.6, а имеется одна угловая точка (p_s, p_n) , так как $k = 2$.

В дальнейшем мы увидим (глава 6, § 3), что РХ биномиального распределения для $m = 1$ описывает восприятие слабых сигналов, в теории низкого порога.

Если в уравнениях (4.35) p_n устремить к нулю, то можно получить РХ теории высокого порога (см. § 2). Наклон первого отрезка РХ (первое уравнение (4.35)) становится бесконечным, в то время как уравнение второго отрезка (второе уравнение (4.35)) принимает вид

$$p(S/s) = (1 - p_s) p(S/n) + p_s. \quad (4.36)$$

Ввиду важности уравнений (4.35) приведем их прямой вывод, основываясь на определении вероятности попадания и вероятности ложной тревоги.

Рассмотрим задачу различения двух биномиальных распределений $p(x/p_s)$ и $p(x/p_n)$ для случая, когда $m = 1$.

Если для решения использовать отношение правдоподобия (4.33) и порог λ_0 , то для вероятности правильного решения (вероятности попадания) можно записать (см. (2.3'))

$$p(S/s) = \sum_{\lambda(x) \geq \lambda_0} p(x/p_s),$$

а для вероятности неправильного решения (вероятности ложной тревоги) (см. (2.2')) —

$$p(S/n) = \sum_{\lambda(x) \geq \lambda_0} p(x/p_n).$$

Если принять в (4.34) $p_s > p_n$, то отношение правдоподобия возрастает с увеличением x . Тогда вероятности попадания и ложной тревоги можно записать в виде

$$p(S/s) = \sum_{x \geq x^*} p(x/p_s), \quad p(S/n) = \sum_{x \geq x^*} p(x/p_n), \quad (4.37)$$

где x^* — пороговое значение стимула, при котором принимается решение. Вероятности $p(x/p_s)$ и $p(x/p_n)$ равны

$$p(x/p_s) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \neq 0, 1, \\ q_s & \text{при } x = 0, \\ p_s & \text{при } x = 1, \end{cases} \quad p(x/p_n) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \neq 0, 1, \\ q_n & \text{при } x = 0, \\ p_n & \text{при } x = 1. \end{cases} \quad (4.38)$$

Используя (4.38), вероятности попадания и ложной тревоги (4.37) можно записать в виде

$$p(S/s) = \begin{cases} 0 & \text{при } 1 < x^* < \infty, \\ p_s & \text{при } 0 < x^* \leq 1, \\ 1 & \text{при } -\infty < x^* \leq 0, \end{cases} \quad p(S/n) = \begin{cases} 0 & \text{при } 1 < x^* < \infty, \\ p_n & \text{при } 0 < x^* \leq 1, \\ 1 & \text{при } -\infty < x^* \leq 0. \end{cases} \quad (4.39)$$

Из уравнений (4.39) находим

$$p(S/s) = \frac{p_s}{p_n} p(S/n) \quad \text{для} \quad 0 < x^* \leq 1$$

и

$$\left. \begin{aligned} p(S/s) &= p_s + q_s = 1 \\ p(S/n) &= p_n + q_n = 1 \end{aligned} \right\} \quad \text{для} \quad -\infty < x^* \leq 0.$$

Из последних двух уравнений имеем

$$p(S/s) = \frac{q_s}{q_n} p(S/n) + \frac{q_n p_s - q_s p_n}{q_n}$$

или

$$p(S/s) = \frac{q_s}{q_n} p(S/n) + \frac{p_s - p_n}{q_n}.$$

Решение $p(S/s) = p(S/n)$ для $-\infty < x^* \leq 0$, которое также следует из двух последних уравнений, приводит к разрывной РХ в точке $p(S/n) = p_n$.

Таким образом, мы вновь получили уравнения (4.35). При выводе этих уравнений не использовалось понятие оптимальности. В частности, мы нигде не использовали какие-либо оптимальные стратегии в задаче различения биномиальных распределений (4.38). Тем не менее РХ (4.35) сразу приводит нас к оптимальным стратегиям. Непосредственно видно, что для заданной вероятности ложной тревоги нельзя получить большей вероятности попаданий, чем значение $p(S/s)$, определяемое на полученной РХ. Следовательно, такое решение будет оптимальным по критерию Неймана — Пирсона. Таким образом, РХ определяет предельные возможности решения для заданных распределений (4.38). Для того чтобы отметить это свойство РХ, иногда говорят о истинной (proper) РХ решения в отличие от других решений, для которых РХ лежит ниже истинной РХ. Такие РХ иногда называют неистинными (improper) [10].

Рассмотрим теперь отношение правдоподобия и РХ для биномиального распределения при $m > 1$. Отношение правдоподобия согласно (4.31) и (4.33) имеет вид

$$\lambda(x) = \frac{C_m^x p_s^x q_s^{m-x}}{C_m^x p_n^x q_n^{m-x}} = \left(\frac{q_s}{q_n}\right)^m \left(\frac{p_s q_n}{p_n q_s}\right)^x, \quad (x = 0, 1, \dots, m). \quad (4.40)$$

Функция $\lambda(x)$ определена только для дискретных значений. Число значений $\lambda(x)$ не превосходит числа значений, принимаемых случайной величиной x . Если $p_s > p_n$, то $\lambda(x)$ является монотонно возрастающей функцией x .

Из (4.40) следует, что между порогом λ_0 отношения правдоподобия и порогом x^* существует следующая зависимость:

$$x^* = \frac{\ln \lambda_0 + m \ln (q_n / q_s)}{\ln (p_s q_n / p_n q_s)},$$

где $p_s > p_n$. Если из уравнения получается нецелое значение x^* , то за порог принимается первое целое число, большее значения, определяемого уравнением.

Так как отношение правдоподобия $\lambda(x)$ является монотонно возрастающей функцией x , то решение на шкале отношения правдоподобия, принимаемое согласно правилу

$$\lambda(x) \geq \lambda_0,$$

эквивалентно решению, принимаемому на основании правила

$$x \geq x^*.$$

Рассмотрим случай, когда $\lambda_0 = 1$ и $p_n = \text{const}$. Если $p_s \rightarrow \rightarrow p_n$, то x^* становится неопределенным выражением вида $0/0$. С другой стороны, если $p_s \rightarrow 1$, то x^* становится неопределенно-стью вида ∞/∞ . Исследование этих крайних случаев показывает, что когда $p_s = p_n$, то порог $x^* = mp_n$, т. е. равен математическому ожиданию биномиального распределения. Если же $p_s = 1$, то $x^* = m$, т. е. порог равен числу независимых испытаний.

РХ решения, соответствующая отношению правдоподобия (4.40), аналогично случаю $m = 1$ является полигоном, состоящим из $m + 1$ линейного отрезка. На рис. 4.6, а показаны РХ для случаев $m = 2$, $m = 4$, $p_s = 0,7$ и $p_n = 0,3$.

РХ в случае биномиального распределения определяется следующими параметрическими уравнениями:

$$p(S/s) = 1 - \sum_{x=0}^{x^*-1} C_m^x p_s^x q_s^{m-x}, \quad p(S/n) = 1 - \sum_{x=0}^{x^*-1} C_m^x p_n^x q_n^{m-x}, \quad (4.41)$$

которые отличаются от уравнений (4.37) лишь тем, что вероятности $p(S/s)$ и $p(S/n)$ выражены через вероятности противоположных событий. x^* в (4.41) является параметром (порогом принятия решения). На основании (4.41) можно получить различные семейства РХ, изменяя или m , или вероятности p_s и p_n при постоянном m .

Исключить параметр x^* из уравнений (4.41) так, чтобы получить явное уравнение РХ, аналогичное (4.35), нельзя, так как эти уравнения достаточно сложны. Поэтому для построения нужно использовать либо таблицы биномиального распределения для вычисления сумм в (4.41), либо нормальное приближение биномиального распределения.

Рассмотрим случай, когда используется нормальное приближение для построения РХ. Точность нормального приближения возрастает при $m \rightarrow \infty$ и $p = \text{const}$. Это естественно, так как нормальное распределение получается как предельное из биномиального при $m \rightarrow \infty$. Нормальная аппроксимация является очень хорошей, когда порог близок к среднему значению и $m > 10$. Для получения приближенной формулы вводится нормированная слу-

чайная величина, связанная с величиной x , распределенной по биномиальному закону

$$Z_s = \frac{x - mp_s}{(mp_s q_s)^{1/2}}. \quad (4.42)$$

Случайная величина Z_s распределена асимптотически нормально с параметрами $N(0, 1)$. Заменяя в (4.41) сумму интегралом, получим

$$\sum_{x=0}^{x^*-1} C_m^x p_s^x q_s^{m-x} \cong (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\frac{mp_s}{(mp_s q_s)^{\frac{1}{2}}}}^{\frac{x^*-1+mp_s+0,5}{(mp_s q_s)^{\frac{1}{2}}}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt.$$

Половина в верхнем пределе интеграла связана с аппроксимацией суммы интегралом. Пользуясь этим соотношением, можно представить (4.41) в виде

$$\begin{aligned} p(S/s) &= 1 - \Phi \left[\frac{x^* - 1 + mp_s + 0,5}{(mp_s q_s)^{1/2}} \right], \\ p(S/n) &= 1 - \Phi \left[\frac{x^* - 1 + mp_n + 0,5}{(mp_n q_n)^{1/2}} \right], \end{aligned} \quad (4.43)$$

где Φ — функция Лапласа, таблицы которой имеются в конце книги.

Вероятности попадания и ложной тревоги могут быть выражены также через функцию $\operatorname{erfc}(x)$, использованную в уравнениях (4.14), (4.15).

Пользуясь соотношением $\operatorname{erfc}(x) + \Phi(x) = 1$, можно записать уравнения (4.43) в виде

$$p(S/s) = \operatorname{erfc} \left[\frac{x^* + mp_s + 0,5}{(mp_s q_s)^{1/2}} \right], \quad p(S/n) = \operatorname{erfc} \left[\frac{x + mp_n + 0,5}{(mp_n q_n)^{1/2}} \right].$$

Схема независимых испытаний Бернулли связана не только с биномиальным распределением. Она приводит к целому классу важных распределений. Здесь мы познакомимся также с геометрическим распределением, являющимся частным случаем отрицательного биномиального распределения, называемого еще распределением Паскаля. Распределение Паскаля определяет вероятности числа испытаний, необходимых для достижения r «успехов», и имеет вид [10]

$$p(x/rp) = C_{x-1}^{r-1} p^r q^{x-r}, \quad \text{где } x = r, (r+1), \dots \quad (4.44)$$

Формула определяет вероятность того, что при x испытаниях будет достигнуто r успехов. Число r фиксировано в каждом

эксперименте. Математическое ожидание величины X

$$M(X) = r/p.$$

Дисперсия величины X равна

$$D(X) = rq/p^2.$$

Геометрическое распределение получается из отрицательного биномиального распределения при $r = 1$. Оно имеет вид

$$p(x/p) = pq^{x-1} \quad (x = 1, 2, \dots),$$

где p — вероятность успеха в одном испытании. Отношение правдоподобия для геометрического распределения определяется формулой

$$\lambda(x) = (p_s/p_n)(q_s/q_n)^{x-1}. \quad (4.45)$$

Если $p_s > p_n$, то $\lambda(x)$ — монотонно убывающая функция x . Следовательно, между x и $\lambda(x)$ имеется однозначное соответствие.

Однако решающему правилу

$$\lambda(x) \geq \lambda_0 \text{ и } \lambda(x) < \lambda_0$$

уже соответствует «обратное» решающее правило

$$x \leq x^* \text{ и } x > x^*.$$

Рассмотрим РХ для геометрического распределения. Параметрические уравнения РХ имеют вид

$$\begin{aligned} p(S/s) &= \sum_{x=1}^{x^*} p_s q_s^{x-1} = \\ &= p_s (1 + q_s + q_s^2 + \dots + q_s^{x^*-1}) = p_s \frac{1 - q_s^{x^*}}{1 - q_s} = 1 - q_s^{x^*}, \\ p(s/n) &= 1 - q_n^{x^*}, \end{aligned} \quad (4.46)$$

где x^* — порог принятия решения (параметр). РХ, определяемые уравнениями (4.46), приведены на рис. 4.6, б для значений $p_s = 0,4$, $p_s = 0,8$ и $p_n = 0,1$.

РХ является полигоном, причем первая точка, соединенная прямолинейным отрезком с началом, имеет координаты (p_n, p_s) . Наклон первого прямолинейного отрезка дает максимальную величину отношения правдоподобия.

Однако наиболее важным распределением, связанным с испытаниями Бернулли, является распределение Пуассона. Оно получается из биномиального, когда число испытаний m неограниченно возрастает, а вероятность p стремится к нулю, так что величина

$$v = mp \quad (4.47)$$

остается постоянной.

Таким образом, распределение Пуассона является хорошим приближением биномиального распределения, когда число m достаточно велико, а p достаточно мало. Можно считать, что на

интервале времени $(0, T)$ имеется последовательность импульсов. Тогда предположение о том, что $m \rightarrow \infty$ может означать либо увеличение интервала $(0, T)$, либо увеличение плотности импульсов ν при заданном T .

При рассмотрении процесса во времени предположение о том, что $p \rightarrow 0$, имеет следующую простую интерпретацию. Пусть в интервале $(0, T)$ случайно располагаются m импульсов. Если в интервале появляется только один импульс, то предполагается, что вероятность попадания импульса в интервал $\Delta t = t_2 - t_1$ равна $\Delta t/T$. Положим $\Delta t/T$ равным вероятности p положительного исхода в одном опыте, т. е. $p = \Delta t/T$.

Если число импульсов m имеет порядок $m \sim T\nu/\Delta t$ ($\nu = \text{const}$), то при $m \rightarrow \infty$ $p \rightarrow 0$, т. е. выполняется основное предположение для распределения Пуассона. Далее, если в интервале $(0, T)$ располагаются m импульсов, то вероятность иметь x импульсов в интервале Δt примем равной $C_m^x p^x q^{m-x}$, где $p = \Delta t/T$.

Пусть теперь $T \rightarrow \infty$ и при этом $mp = \nu$. Тогда для больших m и малых p вероятность иметь x импульсов в интервале $(0, T)$ оказывается равной

$$p(x/\nu) = \exp(-\nu) \frac{\nu^x}{x!}, \quad (x = 0, 1, 2, \dots), \quad (4.48)$$

где ν — среднее число импульсов в интервале $(0, T)$.

Последнее выражение известно под названием «распределение Пуассона». На рис. 4.7, а показаны значения вероятностей, подсчитанные по формуле (4.48) для $\nu = 4$ (сплошные линии) и $\nu = 6$ (пунктирные линии). В отличие от биномиального распределения число x в (4.48) может быть бесконечно большим.

Важным параметром распределения Пуассона является ν — среднее число импульсов в интервале $(0, T)$. Иногда также вводится параметр $\mu = \nu/T$, равный средней интенсивности следования импульсов, т. е. числу импульсов в единицу времени. Тогда

$$\nu = \mu T. \quad (4.49)$$

Рассмотрим элементарные характеристики процесса Пуассона. Математическое ожидание числа импульсов в интервале $(0, T)$, по определению, равно

$$M(X) = \nu.$$

Дисперсия величины X равна также ν :

$$D(X) = \nu.$$

Имеется простая рекуррентная формула, связывающая значения вероятностей $p(x/\nu)$ для последовательных значений x . Имеем

$$x \exp(-\nu) \nu^x / x! = \nu \exp(-\nu) \nu^{x-1} / (x-1)!$$

Откуда

$$xp(x/\nu) = \nu p[(x-1)/\nu]$$

или

$$p(x/v) = v p[(x-1)v/x], \quad (x = 1, 2, \dots).$$

Пользуясь этой формулой, можно получить

$$p(1/v) = v p(0/v),$$

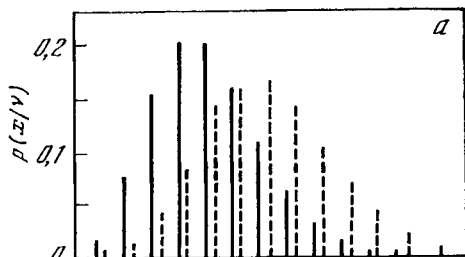
$$p(2/v) = v p(1/v)/2 = v^2 p(0/v)/2,$$

$$p(x/v) = v^x p(0/v)/x! = \exp(-v) v^x / x!$$

Функция распределения (интегральный закон) для процесса Пуассона на основании рекуррентной формулы может быть записана в виде

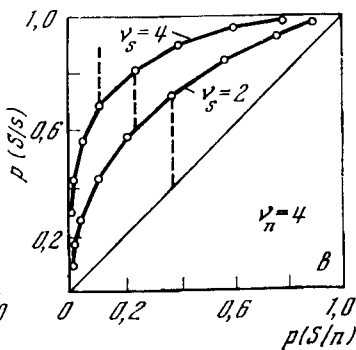
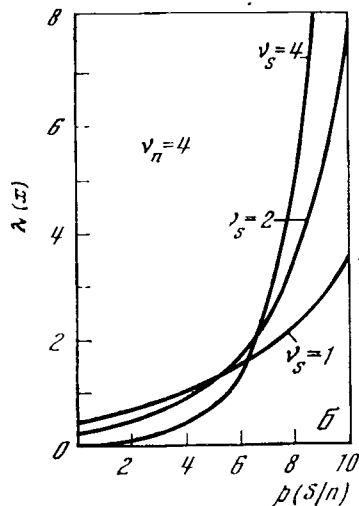
$$\begin{aligned} F(x) &= \exp(-v) \left(1 + v + \frac{v^2}{2!} + \frac{v^3}{3!} + \dots + \frac{v^x}{x!} \right) = \\ &= \exp(-v) \sum_{i=0}^x \frac{v^i}{i!}. \end{aligned}$$

Значения вероятностей $p(x/v)$, как легко видеть, являются



Р и с. 4.7. Характеристика процесса Пуассона

a — значения вероятностей для распределения Пуассона: $v_n = 4$ (сплошные линии) и $v_s = 6$ (пунктирные линии); b — отношение правдоподобия; c — РХ для $v_n = 4$, $v_s = 2$ и 4. Вертикальные пунктирные линии на РХ соответствуют точкам с одинаковым значением порога $\lambda_0 = 1$



коэффициентами разложения в ряд Тейлора функции распределения $F(x)$.

Интересными свойствами обладает интервал t между двумя последовательными импульсами процесса Пуассона. Плотность вероятности величины t является экспонентой вида

$$g(t) = \mu \exp(-\mu t), \quad \mu > 0, t \geq 0. \quad (4.50)$$

Таким образом, вероятность того, что длина интервала находится в пределах $(t, t + \Delta t)$, равна $\mu \exp(-\mu t)dt$. Легко определить, что среднее значение интервала равно $1/\mu$, а дисперсия равна $1/\mu^2$. Плотность вероятности, определяемая уравнением (4.50), характерна для процесса Пуассона.

Плотность вероятности интервала t , в котором появляются r импульсов, определяется формулой

$$g(t/r) = \frac{\mu^r t^{r-1}}{(r-1)!} \exp(-\mu t), \quad (4.51)$$

где $t \geq 0, r = 1, 2, \dots$

Функция (4.51) является плотностью гамма-распределения.

Рассмотрим теперь отношение правдоподобия и РХ для распределения Пуассона. Пусть функция

$$p(x/s) = \exp(-v_s) v_s^x / x! \quad (x = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.52)$$

определяет вероятности в случае, когда имеются полезный сигнал и шум, а функция

$$p(x/n) = \exp(-v_n) v_n^x / x! \quad (4.53)$$

определяет вероятности появления x импульсов, когда имеется один шум. В формулах (4.52), (4.53) v_s и v_n есть среднее число импульсов в интервале $(0, T)$ для этих двух случаев. Отношение правдоподобия для (4.52), (4.53) равно

$$\lambda(x) = \frac{p(x/s)}{p(x/n)} = \exp(v_n - v_s) \left(\frac{v_s}{v_n} \right)^x. \quad (4.54)$$

Для $v_s > v_n$ — это монотонно возрастающая функция. Так как распределение Пуассона есть предельный случай биномиального распределения, функция (4.54), так же как и функция (4.40), является показательной. На рис. 4.7, б изображены функции для значений $v_s : v_s = 1, v_s = 2, v_s = 4$, а также для $v_n = 4$. Функции $\lambda(x)$ изображены на рис. 4.7, б непрерывными линиями. В действительности же они определены лишь для целых положительных значений x ; $\ln[\lambda(x)]$ для распределения Пуассона линейно зависит от x .

Определим РХ для распределения Пуассона. Параметрическими уравнениями являются, очевидно, уравнения (4.37). Параметром будет значение порога x^* , при котором принимается решение.

Подставляя в (4.37) распределения Пуассона, получаем

$$p(S/s) = \exp(-v_s) \sum_{x=x^*}^{\infty} v_s^x / x! \quad p(S/n) = \exp(-v_n) \sum_{x=x^*}^{\infty} v_n^x / x! \quad (4.55)$$

Параметр x^* на РХ изменяется от бесконечности до нуля, причем бесконечно большим значениям порога x^* в (4.55) соответствует точка (0, 0) на РХ, а бесконечно малым значениям — точка (1.1). Исключить параметр x^* из уравнений (4.55) так, чтобы получить явное уравнение РХ, нельзя. Поэтому для построения РХ (4.55) для $v < 100$ следует пользоваться таблицами, например таблицами Молина¹. Так, для параметров $x^* = 18$, $v_s = 20$ и $v_n = 16$ по таблицам находим $p(S/s) = 0,703$, $p(S/n) = 0,341$.

Так же как биномиальное, распределение Пуассона можно аппроксимировать нормальным распределением. Нормальное приближение будет тем точнее, чем меньше величина $(x - v)^3 / v^2$. Тогда суммы в правой части (4.55) могут быть легко вычислены. Выражения для вероятностей $p(S/s)$ и $p(S/n)$ совершенно аналогичны (4.43). Необходимо только заменить математические ожидания и среднеквадратичные значения в (4.43) соответствующими значениями для распределения Пуассона. Тогда имеем

$$p(S/s) \cong 1 - \Phi \left[\frac{x^* - 1 - v_s + 0,5}{\sqrt{v_s}} \right],$$

$$p(S/n) \cong 1 - \Phi \left[\frac{x^* - 1 - v_n + 0,5}{\sqrt{v_n}} \right]. \quad (4.56)$$

Формулы (4.56) могут быть записаны и в другой форме, если использовать уже известную функцию $\operatorname{erfc} x$:

$$p(S/s) = \operatorname{erfc} \left(\frac{x^* - v_s + 0,5}{\sqrt{v_s}} \right), \quad p(S/n) = \operatorname{erfc} \left(\frac{x^* - v_n + 0,5}{\sqrt{v_n}} \right).$$

Для тех же значений параметров ($x^* = 18$, $v_s = 20$ и $v_n = 16$) приближенная формула дает следующие значения вероятностей: $p(S/s) = 0,712$, $p(S/n) = 0,354$.

РХ, соответствующие отношению правдоподобия (4.54) для пары распределений Пуассона с параметрами v_s и v_n , показаны на рис. 4.7, в. РХ построены для $v_s = 2$, $v_s = 4$ и $v_n = 4$. РХ являются полигонами, состоящими из прямолинейных отрезков, соединяющих точки, соответствующие значениям вероятностей, полученных из уравнений (4.55). Причем на РХ имеется бесконечное число таких точек. Вертикальные пунктирные линии определяют точки на РХ с значением порога $\lambda_0 = 1$.

¹ E. C. Molina. Poisson's exponential binomial limit. N. Y. Krieger Publishing Co, 1973.

Для РХ процесса Пуассона нельзя ввести параметр d' , аналогично тому, как он был введен для РХ, построенных с использованием нормального распределения в случае $\sigma_s = \sigma_n = \sigma$. Действительно, пусть полезный сигнал s и шум n являются независимыми пуассоновскими процессами с параметрами v_s и v_n . Наблюдается сигнал $x = s + n$, который также имеет пуассоновское распределение с параметром $v = v_s + v_n$. Математическое ожидание и дисперсия процесса X равны:

$$m = v = v_s + v_n, \quad \sigma^2 = v_s + v_n.$$

Таким образом, распределения $p(x/s)$ и $p(x/n)$ имеют разные дисперсии. В этом случае определяют параметр d'_n следующим образом [10]:

$$d'_n = \frac{m_s - m_n}{(\sigma_s \sigma_n)^{1/2}}.$$

Для нашего случая имеем

$$d'_n = \frac{v_s + v_n - v_n}{[(v_s + v_n) v_n]^{1/2}} = \frac{v_s}{[(v_s + v_n) v_n]^{1/2}}. \quad (4.57)$$

Определенный таким образом параметр d'_n обладает свойством сохранять свое значение на одной РХ, хотя при этом пары величин v_s и v_n могут иметь для этой РХ разные значения. Как увидим дальше, благодаря этому свойству параметр d'_n может служить аргументом М-функции, характеристики, эквивалентной РХ.

Если $v_n \gg v_s$, то параметр d'_n приближенно равен

$$d'_n \cong v_s / \sqrt{v_n}. \quad (4.58)$$

Последнее выражение известно под названием «закон квадратного корня». Оно замечательно тем, что $v_s / \sqrt{v_n} = \text{const}$ соответствует максимальное приращение $\Delta v = v_s - v_n$, обнаруживаемое с заданными вероятностями $p(S/s)$ и $p(S/n)$.

Последний вопрос, который будет рассмотрен в этом параграфе, относится к распределениям, связанным с распределением Пуассона. Как указывалось, существуют непрерывные величины, связанные с числом импульсов на интервале $(0, T)$. Эти непрерывные величины могут также использоваться для проверки тех или иных гипотез о распределении Пуассона. Более того, часто использование таких величин упрощает решение задачи, так как вычисление соответствующих характеристик этих величин оказывается более простой задачей.

Как уже отмечалось, важной непрерывной величиной, характеризующей пуассоновский процесс, является случайный интервал времени t , в котором появляются r импульсов. Случайная величина t имеет плотность (4.51). Часто вместо дискретной величины X , числа импульсов в интервале, для проверки гипотез значитель-

но проще использовать непрерывную величину t . При этом параметр μ гамма-распределения (4.51) можно оценивать, подсчитывая среднее число импульсов в интервале $(0, T)$.

Отношение правдоподобия для пары плотностей (4.51) с параметрами μ_s и μ_n имеет вид

$$\lambda(t) = (\mu_s/\mu_n)^r \exp[-t(\mu_s - \mu_n)], \quad (4.59)$$

где $\mu_s < \mu_n$; $t \geq 0$.

$\lambda(x)$ является монотонно убывающей функцией t . Следовательно, между порогом λ_0 и порогом на оси стимула t^* существует взаимно-однозначное соответствие. Максимальная величина отношения правдоподобия равна $(\mu_s/\mu_n)^r$, т. е. равна порогу λ_0 принятия решения в точке $(0, 0)$ на РХ.

Минимальная величина порога λ_0 , очевидно, равна нулю и достигается в точке $(1, 1)$ на РХ.

Рассмотрим РХ, соответствующие функции $\lambda(t)$, определенной в (4.59), для частного случая $r = 1$, когда плотность (4.51) является экспоненциальной. Для вероятностей попадания и ложной тревоги

$$p(S/s) = \mu_s \int_0^{t^*} \exp(-\mu_s t) dt, \quad p(S/n) = \mu_n \int_0^{t^*} \exp(-\mu_n t) dt,$$

где t^* — порог принятия решения. Откуда после вычислений получаем

$$p(S/s) = 1 - \exp(-\mu_s t^*), \quad p(S/n) = 1 - \exp(-\mu_n t^*).$$

Исключая из этих выражений t^* , получаем явное уравнение РХ в виде

$$p(S/s) = 1 - [1 - p(S/n)]^{\mu_s/\mu_n}. \quad (4.60)$$

Таким образом, использование непрерывного параметра t значительно упрощает решение задачи проверки гипотез для распределения Пуассона.

§ 1. Различные методики эксперимента для построения рабочих характеристик

Построение РХ нейронных систем существенно отличается от их определения для технических устройств. Отличие состоит в следующем.

При построении РХ какого-либо технического устройства, например оптимального детектора сигналов, все характеристики детектора заранее известны конструктору; к ним относятся апостериорные плотности $f(x/s)$, $f(x/n)$, порог λ_0 , который будет использоваться в детекторе, а также значения параметра $d' = \Delta m / \sigma$. При этих условиях РХ детектора определяется уравнениями (4.14) и (4.15). Разумеется, в уравнениях (4.14), (4.15) должны использоваться апостериорные плотности, заданные конструктору детектора. Параметр d' определяется в соответствии с его выражением

$$d' = \frac{\Delta m}{\sigma} = \frac{m_s - m_n}{\sigma},$$

где все величины m_s , m_n и σ известны конструктору детектора. Как правило, σ относится к внешнему источнику шума, с которым смешивается полезный сигнал. Назначение детектора в этом случае состоит в том, чтобы наилучшим образом обнаружить полезный сигнал s в сигнале $x = s + n$. Следовательно, построение РХ такого детектора не представляет каких-либо трудностей. Эта задача является скорее теоретической, чем экспериментальной.

Совсем иначе определяется РХ нейронной системы. В этом случае неизвестны функции $f(x/s)$, $f(x/n)$, параметр d' и порог λ_0 , и определение РХ является также экспериментальной задачей. Для этого используются предложенные ранее схемы экспериментов и специальные методы.

Следует особо остановиться на параметре d' для нейронных систем, который является существенной характеристикой не только внешних воздействий, но также *собственных шумов* нейронной системы. Если для оптимального детектора параметр d' может быть определен конструктором, а priori, то для нейронной системы он остается неизвестным.

Параметр d' для абсолютной и дифференциальной чувствительности нейронной системы зависит от математического ожидания m_n и среднеквадратичного значения σ собственного шума системы. Разумеется, эти параметры заранее неизвестны экспериментатору. Поэтому он вынужден определять РХ, параметр d' и порог λ_0 на основании эксперимента.

Порог λ_0 равен тангенсу угла наклона касательной в рабочей точке экспериментальной РХ. Что касается параметра d' , то могут быть использованы различные методы для его оценки по экспериментальной РХ. В частности, одним из основных методов является наложение на экспериментальную РХ сетки теоретических РХ, построенных для различных значений d' . Тогда на теоретической РХ, которая наилучшим образом аппроксимирует экспериментальную РХ, можно прочесть искомое значение параметра d' .

Если же эксперимент проводится с внешним генератором шума, следует иметь в виду, что параметр d' нельзя определить, считывая с генераторов сигнала и шума s и σ . Как показано в главе 9, параметр d' определяется суммарным шумом (внешний + внутренний). При этом внутренним шумом системы, как правило, нельзя пренебрегать.

Следует заметить, что были попытки априорно построить РХ нейронной системы. Эти попытки известны в психофизике как «теории порога». Различные теории порога позволяют глубже понять соотношение между порогами x^* и λ_0 и с этой точки зрения представляют значительный интерес для изучения. Они будут отдельно рассмотрены в главе 6.

Рассмотрим РХ, полученную в эксперименте со звуковым сигналом. Чистый тон смешивается с белым шумом. Наблюдатель должен был определить: присутствует ли полезный сигнал в шуме или нет. Эксперимент проводился по схеме «да — нет». Для того чтобы получить различные точки РХ, можно, как следует из общей теории принятия решения, поступить двояко: изменять вероятность q_s появления полезного сигнала s или изменять цены за различные решения.

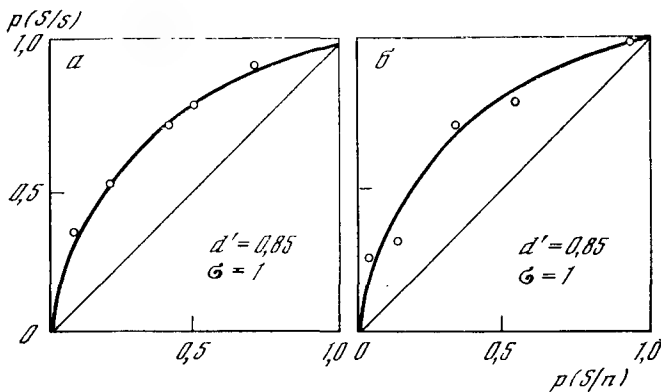
Применительно к частному случаю обнаружения сигнала в шуме значение порога для байесовского оптимального решающего правила равно

$$\lambda_0 = \frac{c_{S_n} - c_{N_n}}{c_{N_s} - c_{S_s}} \cdot \frac{q_n}{q_s}, \quad (5.1)$$

где c_{S_n} — плата за решение о том, что имеется сигнал s , когда в действительности имеется шум (ошибка первого рода); c_{N_s} — плата за решение о том, что имеется шум, когда в действительности имеется сигнал (ошибка второго рода); c_{N_n} — плата за решение о том, что имеется один шум N , когда в действительности присутствует полезный сигнал s ; c_{S_s} — плата за правильное решение о

сигнале s ; q_n — вероятность появления шума; q_s — вероятность появления сигнала.

Как следует из выражения для λ_0 , нужно ожидать, что порог будет меняться в зависимости от цен или от априорных вероятностей сигнала и шума. Это имеет место, когда испытуемый следует байесовой оптимальной стратегии. Однако, как указывалось, РХ характеризует решение и в том случае, когда оно не является оптимальным в данных условиях, т. е. порог λ_0 не выбирается в соответствии с (5.1).



Р и с. 5.1. Экспериментальные РХ для двух испытуемых

В этом случае экспериментатор должен знать, какие параметры следует менять для того, чтобы получить РХ решения. Как показывает эксперимент, в этом случае изменение априорных вероятностей q_s , q_n влияет на решение. На решение влияют также инструкции, даваемые испытуемому, которые в какой-то степени эквивалентны ценам, входящим в уравнение (5.1). Кривая рис. 5.1, а получена при изменении априорной вероятности предъявления сигнала. В соответствии с пятью точками РХ эти вероятности выбирались равными $q_s = 0,1; 0,3; 0,5; 0,7; 0,9$. Согласно рис. 5.1, а меньшим q_s соответствуют большие значения порога λ_0 (и, следовательно, левый нижний угол рис. 5.1, а), а большим значениям q_s — меньшие значения порога λ_0 (и соответственно правый верхний угол рис. 5.1, а). Экспериментальные точки хорошо ложатся на кривую с нормальными апостериорными плотностями вероятностей $f(x/s)$, $f(x/n)$ с равными среднеквадратичными значениями $\sigma_n = \sigma_s = \sigma$.

Параметр d' равен $0,85\sigma$. Величины порогов x_i^* можно определить, зная пороги λ_{i0} для соответствующих значений $p_i(S/n)$ ложной тревоги (см. пример 2.2):

$$x_i^* = \frac{\ln \lambda_{i0}}{d'}. \quad (5.2)$$

Порог λ_{0i} оценивается по сглаженной РХ, построенной по формулам (4.14), (4.15).

Можно и по-другому построить РХ, изменяя цены и оставляя априорные вероятности постоянными. На рис. 5.1, б изображена РХ, построенная таким образом: было принято q_s равным 0,5, а цены за решения варьировались для разных серий опытов. Точки в левом нижнем углу (рис. 5.1, б) соответствуют высокому вознаграждению c_{Ss} за правильное определение сигнала и большим значениям порога λ_0 . Это следует из выражения

$$\frac{c_{Ss} - c_{Nn}}{c_{Ns} - c_{Ss}}, \quad (5.3)$$

входящего в λ_0 (5.1).

Точки РХ в правом верхнем углу соответствуют высокому вознаграждению c_{Nn} за правильное решение о шуме. В этом случае значение λ_0 согласно (5.3) уменьшается. Так же как и раньше, теоретическая РХ в опыте с переменными ценами хорошо совпадает с экспериментальными точками для нормальных функций $f(x/s)$ и $f(x/n)$ при условии $\sigma_s = \sigma_n = \sigma$ и $d' = 0,85\sigma$.

§ 2. Сравнение решений наблюдателя с оптимальными решениями

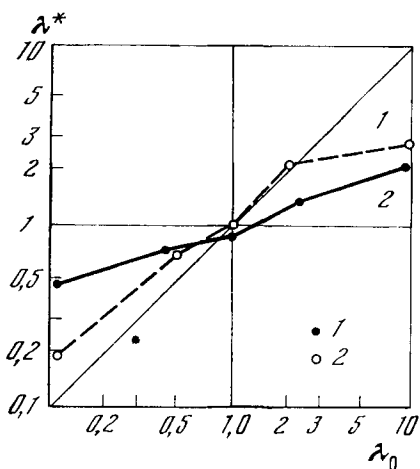
При сравнении решений наблюдателя с оптимальными байесовскими решениями (наиболее общими из известных решений) трудно ожидать совпадения его порогов λ^* с оптимальными значениями порогов λ_0 , полученных в формуле (5.1). Если даже принять, что решающее правило наблюдателя есть байесовское решающее правило и порог наблюдателя определяется по формуле (5.1), то еще остается неясным, соответствуют ли субъективные цены и априорные вероятности наблюдателя ценам и априорным вероятностям формулы (5.1).

Для проверки этого соответствия сравнение с оптимальными решениями представляется весьма интересным. На рис. 5.2 приведены оптимальное λ_0 и на-

блюдателя λ^* с оптимальным порогом λ_0 .

Рис. 5.2. Сравнение порога наблюдателя λ^* с оптимальным порогом λ_0 .

1 — изменение вероятностей; 2 — изменение цен



блюдаемое λ^* значения порогов. Порог λ^* оценивается по РХ, построенной экспериментально, и равен тангенсу угла наклона касательной РХ в точке α . Оптимальное значение λ_0 оценивается по формуле (5.1). При этом предполагается, что «субъективные» цены и вероятности, входящие в (5.1), связаны с действительными ценами и вероятностями линейно. Например, для субъективных вероятностей должно иметь место соотношение

$$q_s^* = kq_s, \quad q_n^* = kq_n. \quad (5.4)$$

В этом случае порог λ_0 не зависит от k .

Сравнивая пороги рис. 5.2, можно заметить, что решения наблюдателя отличаются от байесовских оптимальных решений. Различие порогов больше заметно при больших и малых значениях порога λ_0 . При средних значениях ($\lambda_0 \approx 1,00$) различие незначительно. Таким образом, наблюдатель пытается избежать крайних оптимальных значений порога. Различие между порогом λ_0 и порогом λ^* наблюдателя является важным экспериментальным фактом. Оно может быть следствием трех причин: а) либо наблюдатель вообще не следует оптимальному правилу решения $\lambda(x) \leq \lambda_0$; б) либо наблюдатель следует этому правилу, однако значения цен и априорных вероятностей наблюдателя не равны относительным ценам и априорным вероятностям в (5.1); в) либо апостериорные вероятности $f(x/s)$, $f(x/n)$ наблюдателя не соответствуют апостериорным вероятностям, входящим в $\lambda(x)$.

§ 3. Асимметрия рабочих характеристик

Рабочие характеристики могут быть асимметричными относительно диагонали с отрицательным наклоном, как, например, на рис. 5.3. В этом случае РХ можно аппроксимировать различными кривыми. В частности, вместо нормальных функций плотности вероятности $f(x/s)$, $f(x/n)$ можно использовать экспоненциальные плотности вероятности или плотности вероятности Релея. Однако можно сохранить нормальные плотности вероятности для $f(x/s)$, $f(x/n)$ и подобрать для них соответствующие значения параметров $\Delta m = m_s - m_n$, $\Delta \sigma = \sigma_s - \sigma_n$.

В случае асимметрии среднеквадратичные значения σ_s и σ_n уже нельзя предполагать равными. В частности, экспериментальные точки на кривой рис. 5.3 хорошо аппроксимируются РХ с

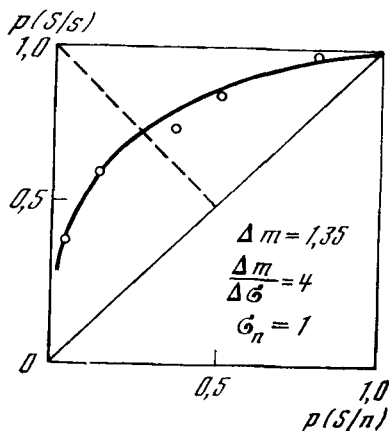


Рис. 5.3. Асимметричная РХ

параметром $\Delta m / \Delta \sigma = 4$. При этом $\sigma_s > \sigma_n$ и $\Delta \sigma > 0$. Значение параметра Δm равно 1,35. Интересно, что отношение $\Delta m / \Delta \sigma = 4$ дает хорошую аппроксимацию для большого числа экспериментальных данных (хотя этот факт является, конечно, чисто эмпирическим). Так, например, в случае идеального наблюдателя получается симметричная РХ, когда наблюдатель имеет полную информацию о сигнале $s(t)$. В случае неполной информации о сигнале РХ оказывается асимметричной. Для значений параметров $\Delta m = 1,35$ и $\Delta m / \Delta \sigma = 4$ отношение правдоподобия $\lambda(x)$ остается монотонной функцией x .

§ 4. Использование рабочих характеристик, построенных в вероятностном масштабе

Как показано в главе 4, для перехода к вероятностному масштабу можно использовать уравнение (4.16). Однако иногда пользуются уравнением, близким к (4.16). Оно также приводит к линейной РХ, отличающейся лишь знаком постоянной от уравнения (4.19):

$$z(S/s) = \frac{\sigma_n}{\sigma_s} z(S/n) - \frac{\Delta m}{\sigma_s}, \quad (5.5)$$

где $\Delta m = m_s - m_n$.

Это — уравнение прямой с коэффициентом $s = \sigma_n / \sigma_s$ и параметром $\Delta m = m_s - m_n$. Рабочие характеристики, построенные в вероятностном масштабе для случаев, приведенных на рис. 5.1 и рис. 5.3, даны на рис. 5.4. Пользуясь ими, удобно проверять гипотезу о гауссовости функций $f(x/s)$, $f(x/n)$ и определять параметры РХ. Прямые (5.5) характеризуются двумя параметрами — Δm и s (наклон), обозначаемыми $D(\Delta m, s)$. Для первого

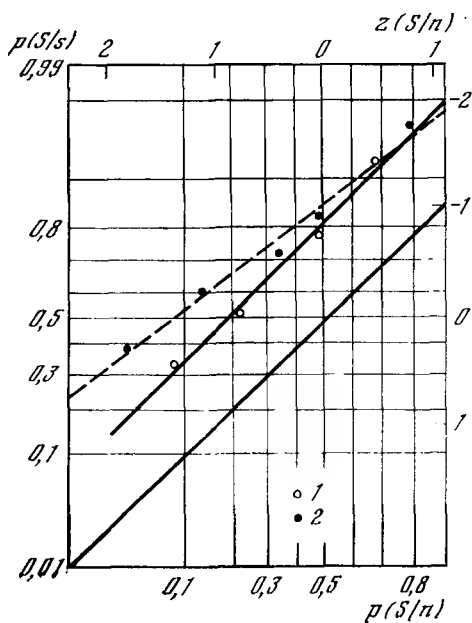


Рис. 5.4. РХ в вероятностном масштабе

1 — первый наблюдатель; 2 — второй наблюдатель

наблюдателя $s = 1$ и $\Delta m = d' = 0,85\sigma$, для второго наблюдателя (асимметричная РХ) $1/s = 1,33$. Следовательно, $\sigma_s = 1,33$ ($\sigma_n = 1$). Для $\Delta m / \Delta \sigma = 4$ и $\Delta \sigma = 0,33$ имеем $\Delta m = 1,35$.

При оценке параметра Δm ($\sigma_s \neq \sigma_n$) можно использовать различные точки прямой, определяемой уравнением (5.5). Можно,

например, использовать точку $z(S/n) = 0$, тогда согласно (5.5) $\Delta m/\sigma_s = -z(S/s)$, или точку $z(S/s) = 0$, т. е. $p(S/s) = 0,5$ и $\Delta m = z(S/n)\sigma_n$.

Для оценки параметров можно выбирать также другие точки прямой (5.5). Например, для этого используется иногда точка пересечения прямой с отрицательной диагональю.

§ 5. Индивидуальные различия рабочих характеристик

Неясно в точности, что определяет симметричный или асимметричный характер РХ. Однако известно, что зрительный анализатор дает почти всегда асимметричную характеристику. Звуковые сигналы также часто приводят к асимметричной РХ, но для некоторых наблюдателей РХ оказывается симметричной. РХ были получены также для других модальностей: например, на рис. 5.5 изображены РХ для вкусового ощущения. Как и для звукового ощущения, здесь имеются индивидуальные различия. Верхняя кривая имеет параметры $\Delta m/\Delta\sigma = 4$, а нижняя — соответствует симметричной РХ с $\Delta\sigma = 0$.

Рабочие характеристики на рис. 5.5 были получены при измерении априорных вероятностей в диапазоне 0,1; 0,3; 0,5; 0,7; 0,9 при постоянных ценах. Для первого испытуемого $D(1,7; 0,7)$ ($\Delta m = 1,35$, $s = 0,7$), для второго испытуемого $d' = 1,20$. Таким образом, РХ несколько варьируют при переходе от одной модальности к другой и для разных испытуемых. Для выяснения причин этих вариаций необходимы дальнейшие исследования.

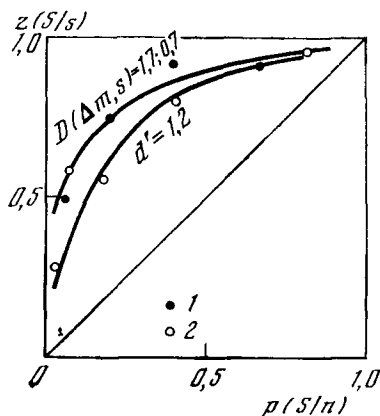


Рис. 5.5. Индивидуальные различия в РХ

1 — первый наблюдатель; 2 — второй наблюдатель

§ 6. Техника построения рабочих характеристик по нескольким точкам

Для построения РХ можно использовать различные схемы опытов. Если применяется двухальтернативная схема с одним интервалом стимулирования, то для одной точки рабочей характеристики необходимо провести одну серию опытов с фиксированными условиями (фиксированной априорной вероятностью появ-

ления сигнала q_s и фиксированными ценами). Определив частоты $p^*(S/s)$ и $p^*(S/n)$, получаем одну точку РХ. Для другой точки нужно изменить какое-либо условие опыта (априорную вероятность появления сигнала или цену) и затем провести следующую серию опытов.

Более экономичной схемой, позволяющей получить сразу несколько точек кривой, является многоальтернативная схема эксперимента с несколькими порогами. В этом случае схема опыта такая же, как в случае «да — нет», но наблюдателю предлагается классифицировать результаты наблюдений не по двум категориям, как в случае двухальтернативной схемы, а по нескольким категориям.

Испытуемому ставится задача, определить апостериорную вероятность $p(S/R_i)$ присутствия полезного сигнала в предъявленной смеси полезного сигнала с шумом. Эксперимент может осуществляться двумя путями. В распоряжение испытуемого может быть предоставлена шкала апостериорной вероятности $p(S/R_i)$ с указателем, который он может устанавливать в любом месте шкалы и с помощью которого может отмечать апостериорную вероятность с большой степенью точности. Ему предлагается расположить каждое наблюдение в какой-нибудь один из интервалов апостериорной вероятности, например, в интервалы 0,0—0,04; 0,05—0,19; 0,20—0,39; 0,40—0,59; 0,60—0,79; 0,80—1,00. Категории могут быть определены словесно, например, следующим образом: «сигнал есть почти наверняка», «сигнал наверное присутствует», «сигнал есть с вероятностью $1/2$ »; «сигнал присутствует в четырех из 80 случаев» и, наконец, «сигнал отсутствует почти наверняка».

Рассмотрим схему эксперимента на зрительном анализаторе с градацией на шесть интервалов апостериорной вероятности $p(S/R_i)$. Испытуемому предъявляется сигнал в шуме в опыте с одним интервалом стимулирования.

Характеристики сигнала и шума, а также инструкции остаются неизменными. (Таковыми характеристиками являются вероятности q_s ($q_n = 1 - q_s$), цены за правильные и неправильные решения и инструкции). В табл. 5.1 представлены данные опытов. Всего было проведено 1188 опытов. При этом число предъявлений сигнала n_s было равно 597 и число предъявлений шума n_n равно 591. Следовательно, в данной серии опытов $q_s = 597/1188 \approx 1/2$. В таблице приведены категории апостериорной вероятности $p(S/R_i)$, соответствующие шести категориям.

В полосе I дано число стимулов $f(R_i)$, отнесенных испытуемым к i -й категории вероятности $p(S/R_i)$. Так, испытуемый 220 сигналам из 1188 приписал вероятность 0,0—0,04. При этом полезный сигнал s содержался только в 46 из 220 сигналов. Остальные 174 сигнала содержали один шум.

Следующим 229 сигналам он приписал вероятность 0,05—0,19. При этом полезный сигнал содержался только в 57 из 229 сигналов. Остальные 172 сигнала этой категории содержали один шум.

Таблица 5.1

№ по- лосы	Вероятность	Категория вероятности $p(S/R_i)$						Σ
		0,0—0,04	0,05—0,19	0,20—0,39	0,40— 0,59	0,60— 0,79	0,80— 1,00	
I	$f(R_i)$	220	229	170	193	195	181	1188
II	$f(sR_i)$	46	57	66	101	154	173	597
	$p(S/R_i)$	0,21	0,25	0,39	0,52	0,78	0,96	
	$p(R_i/s)$	0,07	0,09	0,11	0,18	0,26	0,29	
	$p(S/s)$	1,00	0,93	0,84	0,73	0,55	0,29	
III	$f(nR_i)$	174	172	104	92	41	8	591
	$p(n/R_i)$	0,79	0,75	0,61	0,48	0,22	0,04	
	$p(R_i/n)$	0,29	0,29	0,18	0,16	0,07	0,01	
	$p(S/n)$	1,00	0,71	0,42	0,24	0,08	0,01	

В первой строке полосы II содержится число сигналов $s + n$, отнесенных к i -й категории, или совместное число $f(sR_i)$ появлений сигнала $s + n$ и i -й категории. Интересно отметить, что чем больше среднее значение вероятности категории, тем больше сигналов $s + n$ относит испытуемый к данной категории. Так, например, для категории 0,80—1,00 среднее значение вероятности равно 0,9, при этом испытуемый относит к этой категории 173 сигнала из 181. Средняя вероятность категории 0,0—0,4 равна 0,02, при этом испытуемый относит только 46 сигналов $s + n$ из 220 к данной категории.

Во второй строке полосы II приводятся апостериорные вероятности $p(S/R_i)$, которые вычисляются по обычной формуле (Приложение I)

$$p(S/R_i) = \frac{f(sR_i)}{f(R_i)}.$$

Так, например, $f(S/R_i) = 46/220 = 0,21$.

Апостериорные $f(S/R_i)$ характеризуют способность испытуемого правильно оценивать заданные категории апостериорных вероятностей. Как показывает строка значений $p(S/R_i)$, испытуемый в первом приближении правильно воспроизводит заданные апостериорные вероятности категорий.

В третьей строке полосы II содержатся обратные апостериорные вероятности $p(R_i/s)$, которые вычисляются по формуле (Приложение I)

$$p(R_i/s) = \frac{f(sR_i)}{p(s)},$$

где $p(s)$ — число ответов, содержащих полезный сигнал. В дан-

ной серии опытов $p(s) = 597$. Так, например, $p(R_i/s) = 46/597 = 0,07$.

Наконец, четвертая строка полосы II содержит вероятности попадания $p(S/s)$. Значения $p(S/s)$ получаются суммированием значений вероятности $p(R_i/s)$ третьей строки справа налево в соответствии с формулой

$$p(S/s) = \sum_{\lambda(R_i) \geq \lambda_0} p(R_i/s).$$

Из табл. 5.1 видно, что если испытуемый использует порог λ_0 , соответствующий верхней границе апостериорной вероятности $p(R_i/s)$, то вероятность обнаружить сигнал — $p(S/s) = 0,29$. Если он использует меньшее значение порога λ_0 , соответствующее категории 0,60—0,79, то вероятность обнаружить сигнал равна сумме вероятностей $p(R_i/s)$, содержащихся в двух последних столбцах табл. 5.1: $0,29 + 0,26 = 0,55$.

Наименьшему значению порога λ_0 соответствует категория 0,0—0,04, при этом $p(S/s) = 1$.

В полосе III приводятся данные, относящиеся к шуму. В первой строке этой полосы дано действительное число сигналов n , отнесенных испытуемым к той или иной категории апостериорной вероятности. Так, например, к первой категории 0,0—0,04 испытуемым было отнесено 174 (220—46) сигнала, содержащих шум. Апостериорные вероятности $p(n/R_i)$ и $p(R_i/n)$ вычисляются аналогично вероятностям $p(s/R_i)$ и $p(R_i/s)$.

Наконец, вероятность ложной тревоги $p(S/n)$, содержащаяся в четвертой строке полосы III, вычисляется аналогично вероятности $p(S/s)$:

$$p(S/n) = \sum_{\lambda(R_i) \geq \lambda_0} p(R_i/n).$$

При этом для наибольшего значения порога λ_0 , соответствующего вероятности 0,80—1,00, получается наименьшая вероятность ложной тревоги, равная 0,01.

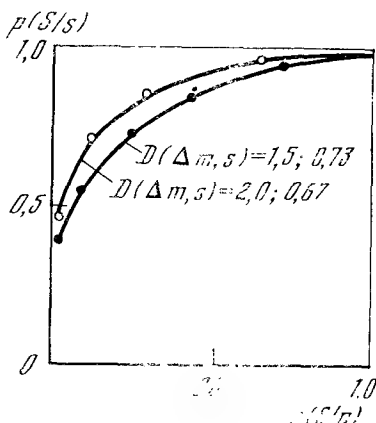
Как видно из табл. 5.1, в результате опытов, проводимых в стационарных условиях, получается сразу пять точек РХ (пять значений $p(S/s)$ и соответствующие им пять значений $p(S/n)$). Число точек РХ на единицу меньше числа категорий апостериорной вероятности $p(S/R_i)$. Эксперименты показывают, что число категорий вероятности $p(S/R_i)$ может быть произвольным. Следовательно, при ограниченном числе опытов можно получить достаточно большое число точек РХ. Эксперимент показывает, что даже при большом числе категорий испытуемый хорошо «отслеживает» заданные категории.

Построение РХ в эксперименте по многоальтернативной схеме обладает определенными преимуществами по сравнению со схемами «да — нет» и схемой с двумя интервалами стимулирования. К основным преимуществам этой схемы следует отнести: а) полу-

чение сразу нескольких точек РХ, б) стационарность условий опыта.

Число точек РХ на единицу меньше числа категорий апостериорной вероятности $p(S/R_i)$, используемых в опыте. Так как испытуемый способен работать с достаточно большим числом категорий, например с 30—50 категориями, то сразу можно получить большое число точек РХ. С другой стороны, условия опыта (вероятность q_s и инструкции) остаются в течение всего опыта неизменными, что сильно упрощает эксперимент.

На рис. 5.6 приведены РХ для двух наблюдателей. Для всех случаев использовалась аппроксимация РХ с нормальными апостериорными плотностями $f(x/s)$, $f(x/n)$. Как видно из рис. 5.6, аппроксимация оказывается достаточно хорошей. Это характерно для измерения по схеме с несколькими порогами. В опытах «да — нет» результат обычно значительно хуже. При вычислении кривых по схеме с несколькими порогами происходит «сглаживание» данных, приводящее к монотонно возрастающей кривой. Интересно, что существенная разница имеет место даже тогда, когда для построения РХ используется только $1/4$ от числа опытов в эксперименте «да — нет». Но даже в этом случае точность метода значительно выше, чем эксперимента «да — нет». Экспериментальные результаты относятся к световым сигналам, применяемым к наблюдателям, адаптированным к темноте.



Р и с. 5.6. Экспериментальные РХ для двух наблюдателей

ТЕОРИЯ СТАТИСТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОРОГА В ПСИХОФИЗИКЕ

§ 1. Определение порога

Предположение о существовании минимального значения x^* сигнала x , воспринимаемого системой, является простой и естественной гипотезой. Кажется почти очевидным существование предельной чувствительности любого реального физического элемента, чувствительного к сигналам. По-видимому, это предположение и привело к гипотезе о существовании порога x^* . Эта гипотеза появилась значительно раньше теории Фехнера о пороге, изложенной в книге «Элементы психофизики» [12], являющейся одной из первых работ в этой области. По-видимому, она была уже в работах греческих философов и уже заведомо — в работах Лейбница и Гербарта (см. [8]). Методы измерения порога также были известны до Фехнера. Однако его заслуга состоит в систематизации и разработке этих методов, и поэтому упомянутая работа является основополагающей. Однако эксперименты, проведенные для доказательства существования порога, не дали положительных результатов. До настоящего времени нет прямого эксперимента, из которого следовало бы, что система имеет порог x^* . Вместо ожидаемого детерминированного алгоритма действия в виде

$$x \geq x^* \Rightarrow R, \quad x < x^* \Rightarrow 0$$

обнаружилось, что любая система обладает случайной реакцией. Именно при воздействии на нее сигнала $s = \text{const}$ ее реакция является случайной величиной. Пусть появлению реакции приписывается значение «1», а ее отсутствию — значение «0».

Вероятности $p_s(1)$ и $p_s(0)$ событий «1» и «0» связаны соотношением $p_s(0) = 1 - p_s(1)$. Обе вероятности зависят от s , как от параметра.

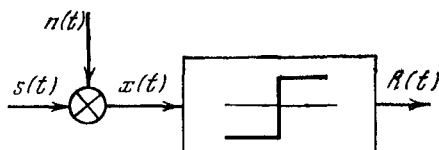
Причина такого «поведения» реальной системы обусловлена наличием собственных или внутренних шумов, мешающих достоверному обнаружению сигнала s . Действительно, к сигналу s в системе добавляется внутренний шум n и, таким образом, решение принимается на основании сигнала $x = s + n$ (разумеется, аддитивная смесь сигнала s и шума n является здесь лишь упрощающим предположением). Схема реальной системы, содержащей внутренний шум, изображена на рис. 6.1. При этих условиях труд-

но придумать эксперимент, который непосредственно доказывал бы существование порога x^* .

Характеристикой системы со случайной реакцией является психометрическая функция, выражающая зависимость вероятности «попадания» $p(S/s)$ от величины стимула s (или относительной величины стимула $s/s_{\max}$). Психометрические функции имеют вид кривых, изображенных на рис. 6.6 (см. ниже). Отличная от нуля вероятность $p(S/s) = p(S/n)$ при $s = 0$ указывает на наличие внутренних шумов в системе. При этом вероятность ложной тревоги $p(S/n)$ может изменяться в зависимости от «мотивации», несенсорной информации, действующей на систему.

Следует сказать о распространенном заблуждении, касающемся психометрической функции. Часто полагают, что психометрическая функция есть интегральная функция распределения вероятности величины стимула s . В действительности, конечно, это не так.

Р и с. 6.1. Схема порогового восприятия



Психометрическая функция является вероятностью положительных ответов при данном значении стимула s . Ее оценка $p^*(S/s)$ для двухальтернативной схемы опыта с обнаружением сигнала в собственном шуме определяется формулой

$$p^*(S/s) = n^+/n,$$

где n^+ — число правильно угаданных сигналов s (число единиц); n — число проведенных опытов. Случайной величиной в данном случае является реакция с двумя значениями — «0» и «1». Ее функция распределения будет ступенчатой функцией:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - p_s, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & 1 \leq x < \infty, \end{cases}$$

где p_s — вероятность появления единицы.

При увеличении стимула s вероятность $p(S/s)$ монотонно возрастает и стремится к единице. Поэтому зависимость $p_s(1)$ от s имеет вид интегральной функции распределения вероятностей. Однако не следует при этом забывать, что «истинная» психометрическая кривая является вероятностью p_s , зависящей от параметра s .

Итак, к настоящему времени не существует *crisis experiment*, подтверждающий существование порога x^* . Поэтому в психофизике, и в частности в теории измерений, не может использоваться факт существования порога x^* .

Эта ситуация, сложившаяся в психофизике более чем через 100 лет после опубликования книги Фехнера «Элементы психофизики» [12], вызывала и продолжает вызывать многочисленные дискуссии о существовании порога x^* . Так, в работе Светса: «Существует ли порог?», опубликованной в 1961 г. [23], автор справедливо ставит вопрос о существовании порога x^* как критического значения стимула. Интересно отметить, что несколько исследователей с самого начала возражали против гипотезы о существовании порога.

Так, Ястров (Jastrow, 1888 г.) утверждал, что существование порога является недоразумением (см. [8]). Он считал, что не существует значения x^* стимула, которому можно приписать особую роль, и применение идеи дискретности для описания непрерывных стимулов приведет лишь к недоразумению. Урбан в 1930 г. утверждал, что гипотеза о пороге лишняя, и считал, что понятие «порог» не должно лежать в основе психофизики (см. [8]).

Однако помимо дискуссионной стороны дела появляются практические трудности, связанные с измерением порога x^* .

Считалось принятым определять x^* как значение стимула, при котором $p(S/s) = 1/2$ (или $p(S/s) = 3/4$). Однако вопрос о существовании порога x^* порождает другой вопрос: «Что означает величина x^* , измеренная таким образом? И как ее можно использовать?»

Последний вопрос может привести к неожиданному решению проблемы порога, если обратиться к теории статистических решений. Как было показано ранее, теория решений однозначно определяет характеристику детектора. Такой характеристикой является семейство РХ, зависящих от параметра d' . С другой стороны, в психофизике исчерпывающей характеристикой является семейство психометрических функций, зависящих от вероятности ложной тревоги $p(S/n)$. Эти характеристики неэквивалентны. В то время как РХ, в соответствии с теорией решений, дают исчерпывающее описание детектора, психометрическая функция дает лишь неполное описание детектора. Она содержит скрытые параметры (дисперсию σ^2), зависящие от собственных шумов нейронной системы. Рассматривая семейство РХ (рис. 4.3), можно заметить, что для заданной вероятности ложной тревоги $\alpha_0 p(S/s)$ зависит от параметра d' . В этом также легко убедиться, используя нормальную аппроксимацию плотностей $f(x/s)$ и $f(x/n)$.

В простейшем случае параметрические уравнения РХ имеют вид

$$p(S/s) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \int_{x^*}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x - m_s)^2}{2\sigma^2}\right] dx = \operatorname{erfc}\left(\frac{x^* - m_s}{\sigma}\right),$$

$$p(S/n) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \int_{x^*}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x - m_n)^2}{2\sigma^2}\right] dx = \operatorname{erfc}\left(\frac{x^* - m_n}{\sigma}\right).$$

Если в этих уравнениях обозначить

$$\theta^* = \frac{(x^* - m_n)}{\sigma} \quad \text{и} \quad d' = \frac{\Delta m}{\sigma},$$

то их можно записать так:

$$p(S/s) = \operatorname{erfc}(\theta^* - d'), \quad p(S/n) = \operatorname{erfc} \theta^*. \quad (6.1)$$

Уравнения (6.1) определяют РХ в зависимости от уже известного параметра $d' = \Delta m / \sigma$.

В частном случае $m_s = s$ и $m_n = 0$, $d' = s/\sigma$. Из первого уравнения (6.1) видно, что вероятность $p(S/s)$ определяется относительной величиной полезного сигнала d' (относительно внутреннего шума системы).

Параметр θ^* может быть определен из условий: $p(S/n) = \alpha_0$, $d' = \theta^*$ и $p(S/s) = 1/2$. Следовательно, θ^* , так же как x^* , является порогом. Однако между x^* и θ^* имеется существенное различие: порог θ^* учитывает собственный шум системы, в то время как x^* не зависит от него.

Характеристика (6.1), называемая в дальнейшем М-функцией, полностью описывает восприятие слабых сигналов. С другой стороны, такое описание представляется также РХ. Отсюда следует, что между РХ и М-функцией должна существовать связь. Эту связь устанавливают уравнения (6.1). Пары значений $p(S/s)$ и $p(S/n)$ согласно (6.1) соответствуют определенным значениям θ^* и d' . Если $d' = \text{const}$, то, как это видно из уравнения (6.1), значения $p(S/s)$ и $p(S/n)$ принадлежат одной РХ. Если $p(S/n) = \text{const}$, то первое уравнение (6.1) определяет М-функцию.

Более важной является зависимость между опытной РХ решения и ей соответствующей М-функцией. Имея такую зависимость, можно переходить от одной кривой к другой, не производя аппроксимацию экспериментальных кривых. Эту связь легко понять на основании рис. 6.2. Пусть, например, требуется по РХ определить соответствующую М-функцию. Для этого на семействе РХ, показанных слева на рис. 6.2, проводится вертикальная прямая $p(S/n) = \alpha$. В точках ее пересечения с РХ считываются вероятности $p(S/s)$. Соответствующие значения d' считываются на РХ. Справа на рис. 6.2 изображена построенная М-функция $p(S/s) = \Phi(d')$.

Если требуется совершить обратный переход от М-функции к РХ, то следует воспользоваться семейством М-функций (слева на рис. 6.3) для различных значений вероятности $p(S/n)$, определяемых в точке пересечения М-функций с осью ординат. Это построение ясно из рис. 6.3.

Связь между РХ и М-функциями можно успешно использовать для анализа нейронной системы. Некоторые стороны процесса решения лучше заметны при использовании М-функции. Это относится, например, к зависимости вероятности $p(S/s)$ от относительной интенсивности сигнала d' , которую можно проследить по одной

М-функции. С другой стороны, для выяснения зависимости $p(S/s)$ от $p(S/n)$ требуется семейство РХ.

Однако следует заметить, что семейство РХ полностью эквивалентно семейству М-функций.

При построении М-функции важно правильно выбрать ее аргумент. В простейшем случае нормальных распределений с одинаковыми дисперсиями аргументом М-функции, как видно из уравнений (6.1), является параметр d' . Однако уже в случае нормальных распределений с разными дисперсиями σ_s и σ_n параметр d' нельзя использовать в качестве аргумента М-функции.

Для выбора аргумента М-функции следует использовать эквивалентность М-функции РХ. При этом для одной РХ аргумент М-функции сохраняет постоянное значение.

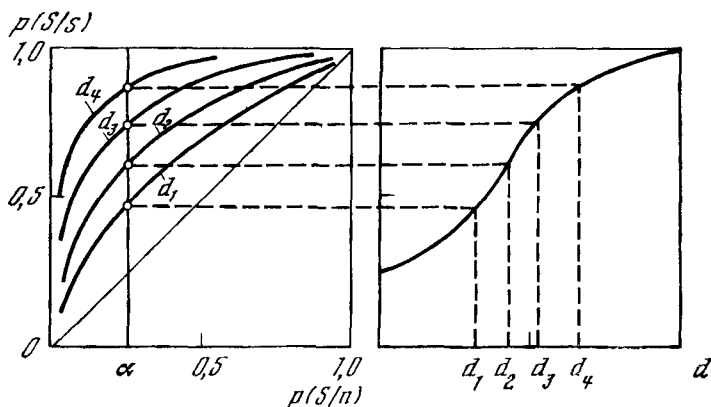


Рис. 6.2. Построение М-функции по РХ

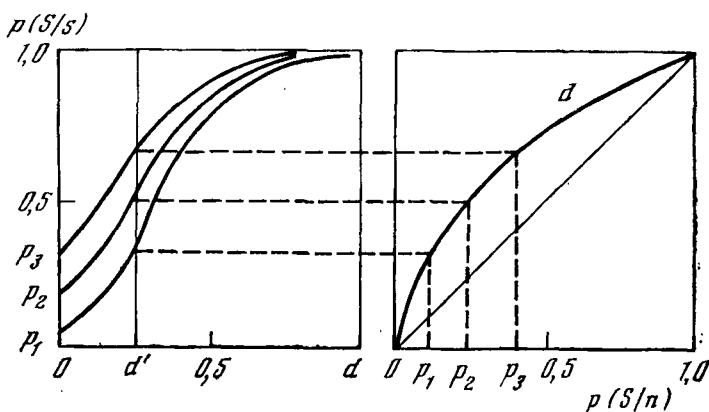


Рис. 6.3. Построение РХ по М-функциям

Так, в случае нормальных апостериорных плотностей $f(x/s)$ и $f(x/n)$ с разными дисперсиями для выбора аргумента М-функции удобно перейти к РХ в вероятностном масштабе. Из уравнения (5.5) предыдущей главы можно заметить, что в случае $\sigma_s \neq \sigma_n$ РХ зависит от двух параметров: $\mu = \sigma_s/\sigma_n$ и $d'_s = \Delta m/\sigma_s = (m_s - m_n)/\sigma_s$.

Таким образом, если в качестве аргумента М-функции выбрать параметр d'_s , то следует рассмотреть семейство М-функций, зависящих от параметра μ . Параметр d'_s можно использовать как аргумент М-функции для распределения Пуассона (глава 4, § 4).

Теория статистических решений позволяет выделить существенные параметры процесса принятия решения. Ими являются θ^* и d' . С другой стороны, классический порог x^* не определяет полностью вероятности $p(S/s)$ и, следовательно, не позволяет описать процесс решения. Поэтому решение вопроса о существовании порога x^* не может оказать влияния на описание восприятия слабых сигналов. Этот вопрос является чисто гносеологическим. Более того, использование порога x^* для этой цели лишь затрудняет задачу, так как от исследователя ускользает, в частности, влияние собственных шумов, которое учитывается при использовании параметров θ^* и d' .

Выделение существенных параметров процесса решения имеет решающее значение при выборе и описании эксперимента. В этом состоит одно из главных преимуществ применения теории решений к задачам психофизики.

Как упоминалось в предыдущей главе, были предприняты попытки построить РХ на основании чисто теоретических соображений. Эти попытки известны под названием *теорий порога*.

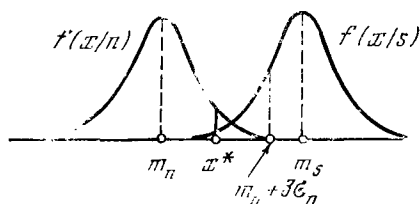
Непосредственным стимулом для возникновения таких теорий были попытки уточнить понятие порога x^* . В частности, одни исследователи считали, что имеется достаточно высокий порог x^* (*теория высокого порога* — Блэквелл [7, 14]), другие, наоборот, предполагали, что имеется низкий порог (*теория низкого порога* — Люс [19]) см. также Грин, Светс [14]).

В настоящее время эти соображения имеют чисто гносеологическое значение. Существенными являются лишь сами рабочие характеристики, позволяющие исчерпывающим образом описать нейтронную систему.

§ 2. Теория высокого порога

Предполагается, что имеется достаточно высокий постоянный стимульный порог. Он расположен приблизительно на расстоянии $3\sigma_n$ выше среднего значения собственного шума системы (рис. 6.4). Шум очень редко превышает такой порог, поэтому истинная вероятность ложных тревог в такой модели принимается равной нулю: $p^*(S/n) = 0$. Истинная вероятность попадания $p^*(S/s)$ зависит

от интенсивности сигнала и увеличивается вместе с ней. Поэтому РХ модели высокого порога служит отрезок оси ординат. Такая система, очевидно, не способна различать сигналы ниже порога. Однако эксперимент обнаруживает отличную от нуля вероятность $p(S/n)$. Наблюдаемая величина вероятности попаданий $p(S/n)$ равна истинной $p^*(S/s)$ плюс вероятность попаданий при наличии



Р и с. 6.4. Порог x^* на оси стимула

одного шума. Рабочая характеристика для высокого порога имеет вид

$$p(S/s) = p^*(S/s) + p(S/n)[1 - p^*(S/s)]. \quad (6.2)$$

В координатах $p(S/s)$ и $p(S/n)$ — это уравнение прямой с коэффициентом $1 - p^*(S/s)$ и значением в нуле $p^*(S/s)$ (рис. 6.5). Для истинной величины попаданий $p^*(S/s)$ из уравнения (6.2) легко получить выражение

$$p^*(S/s) = \frac{p(S/s) - p(S/n)}{1 - p(S/n)}. \quad (6.3)$$

В основе теории высокого порога лежит предположение о независимости механизма, создающего ложные тревоги, и механизма, ответственного за попадания. Действительно, используя уравнение прямой, можно записать

$$1 - p(S/s) = [1 - p(S/n)][1 - p^*(S/s)].$$

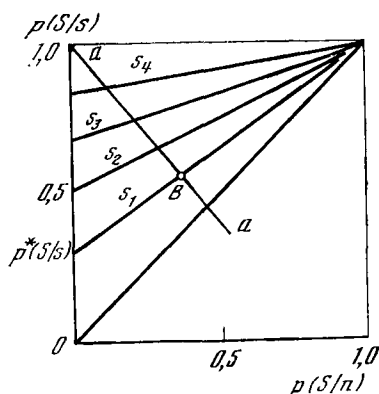
Отсюда следует, что события «ложная тревога» и «попадание» независимы, так как вероятность $1 - p(S/s)$ равна произведению вероятностей дополнительных событий. Таким образом, дополнительные события независимы, а следовательно, независимы события «ложная тревога» и «попадание». По предположению авторов теории, этот результат имеет простую интерпретацию. Именно механизм, создающий ложные тревоги, работает только при отсутствии раздражителя и, следовательно, не зависит от сенсорного механизма. В логике этому утверждению, казалось, трудно отказать. Тем не менее оно не подтверждается опытом. Такой опыт был предпринят Смитом и Вильсоном (см. [14]). Он состоит в следующем.

Важной характеристикой собственных шумов нейронной системы является психометрическая функция (рис. 6.6). По оси ординат откладывается вероятность попадания $p(S/s)$, а по оси абсцисс — величина интенсивности сигнала s (относительной интенсивности). Задавая те или иные величины стоимости различных

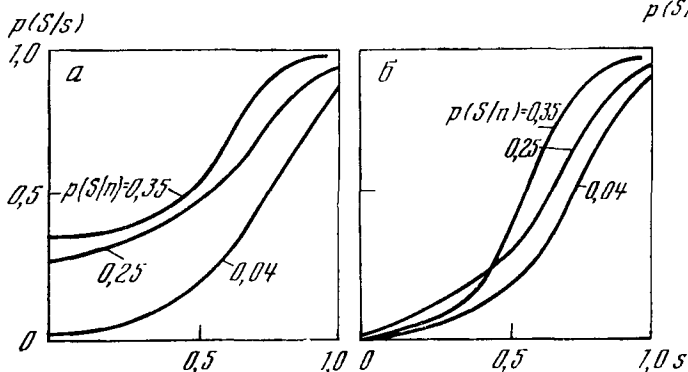
решений, можно добиться различных значений вероятности ложной тревоги $p(S/n)$.

На рис. 6.6, а изображены три психометрические функции для значений вероятности ложной тревоги, равной 0,35; 0,25; 0,04, причем значению 0,35 соответствует верхняя функция, приводящая к наименьшему абсолютному порогу (который берется при

Р и с. 6.5. РХ теории высокого порога



Р и с. 6.6. Психометрические функции



$p(S/s) = 0,5$). Зная вероятности ложной тревоги, можно по формуле (6.3) определить истинное значение вероятности попаданий (для всех значений раздражителя) и перестроить психометрические функции так, как это показано на рис. 6.6, б. При этом все функции должны начинаться в начале координат, так как $p^*(S/s) = 0$. Если механизмы ложных тревог и попаданий независимы, то нормированные психометрические функции должны располагаться строго одна над другой и при значении $p(S/s) = 0,5$ давать одно и то же значение абсолютного порога. Однако, как показывает рис. 6.6, б, это не имеет места. Таким образом, основное предположение теории высокого порога оказывается неверным.

Рассмотрим РХ этой модели для разных значений полезного сигнала (разных значений $p^*(S/s)$, рис. 6.5). Это — прямые линии,

соединяющие точку $p^* (S/s)$ с точкой с координатами (1,1) в правом верхнем углу. Порог λ_0 для каждой характеристики имеет постоянное значение. При переходе от нижних характеристик к верхним порог λ_0 уменьшается, так как с увеличением $p^* (S/s)$ уменьшается наклон прямых.

Порог x^* на каждой характеристике не сохраняет своего значения. Он имеет большее значение в левом нижнем углу (для малых значений $p (S/s)$ и $p (S/n)$) и уменьшается при переходе в правый верхний угол (точка (1,1)), когда эти вероятности стремятся к единице. Это показывает, что реальные характеристики рис. 6.5, учитывающие отличную от нуля вероятность ложных тревог, приводят к необходимости принять, что порог x^* изменяется в зависимости от несенсорной информации, поступающей в нейронную систему.

Этот важный вывод, находящийся в соответствии с экспериментом, противоречит первоначальному предположению теории высокого порога о постоянстве x^* . В модели высокого порога нет однозначного соответствия между порогом λ_0 в смысле теории статистических решений и порогом x^* . Действительно, порог λ_0 имеет на одной характеристике единственное значение, в то время как x^* может принимать множество значений, за счет чего достигается изменение вероятностей $p (S/s)$ и $p (S/n)$.

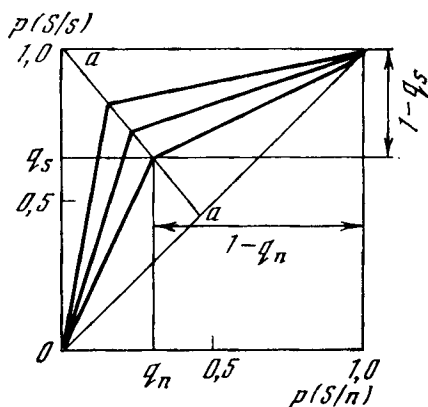
Рассмотрим некоторые типичные ситуации восприятия сигналов и рамках теории высокого порога. Пусть, например, обнаруживается слабый сигнал на фоне собственных шумов. Допустим, что мы находимся в точке B на нижней характеристике рис. 6.5. Пусть интенсивность сигнала возросла. Тогда мы переместимся на одну из верхних РХ вдоль прямой ($a - a$) (рис. 6.5), что приведет к увеличению $p (S/s)$ и к уменьшению $p (S/n)$. На оси x (рис. 6.4) этому соответствует сдвиг функции $f(x/s)$ вправо (вследствие увеличения интенсивности полезного сигнала s) и одновременное увеличение порога x^* , приводящее к уменьшению $p (S/n)$. Это, по крайней мере качественно, соответствует экспериментальным данным, так как известно, что с увеличением интенсивности полезного сигнала вероятность ложной тревоги уменьшается, а вероятность попаданий растет.

Рассмотрим другую ситуацию, когда интенсивность полезного сигнала s остается постоянной, а инструкции изменяются так, чтобы изменить вероятности $p (S/s)$ и $p (S/n)$. Этого можно добиться, изменяя, например, априорную вероятность полезного сигнала или цены за неправильные решения. В этом случае мы «находимся» на одной из характеристик рис. 6.5, соответствующей заданной интенсивности полезного сигнала. При изменении цен и априорных вероятностей мы «перемещаемся» по РХ. При этом меньшим значениям априорной вероятности q_s появления сигнала s и высоким ценам за правильное обнаружение шума соответствуют большие значения порога x^* (т. е. левый нижний угол РХ). Это качественно соответствует экспериментальным данным.

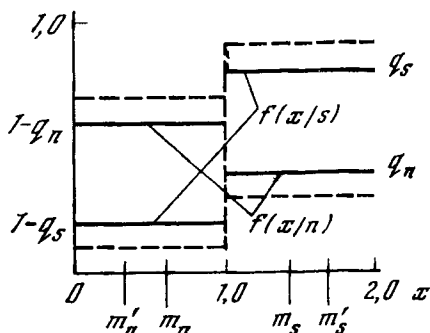
Таким образом, теория высокого порога в первом приближении правильно отражает реальную ситуацию. При сравнении РХ теории высокого порога с экспериментальными данными обнаруживается хорошее совпадение в области значений $p(S/s)$ и $p(S/n)$, близких к единице, и значительное различие в области малых значений вероятностей. Это позволяет предположить, что основная гипотеза о независимости механизмов попадания и ложных тревог лишь грубо отражает действительную ситуацию.

§ 3. Теория низкого порога

Существуют три разновидности теории низкого порога. Одна из них почти аналогична теории высокого порога, разница лишь в том, что порог выбран ниже, чем порог x^* в теории высокого порога. Вследствие их близости мы не будем останавливаться на анализе этой теории.



Р и с. 6.7. РХ теории низкого порога



Р и с. 6.8. Апостериорные плотности вероятности модели Люса

Наиболее интересной из этой группы является теория Люса [19]. Рабочая характеристика модели приведена на рис. 6.7. Она получается на основании функций $f(x/s)$, $f(x/n)$, изображенных на рис. 6.8. Предполагается, что значения x находятся в интервале $(0,2)$ (рис. 6.8). Действительно, для вероятности попаданий можно записать

$$p(S/s) = \int_{x^*}^2 f(x/s) dx.$$

Для плотности $f(x/s)$, изображенной на рис. 6.8, получаются два выражения вероятности $p(S/s)$ для $x^* \leq 1$ и $x^* > 1$:

$$\begin{aligned} p(S/s) &= 1 - x^* (1 - q_s) & (0 \leq x^* < 1), \\ p(S/s) &= (2 - x^*) q_s & (1 \leq x^* \leq 2). \end{aligned} \quad (6.4)$$

Из последнего равенства следует, что при $x^* = 1$ вероятность попадания равна q_s . Для вероятности ложной тревоги можно записать

$$p(S/n) = \int_{x^*}^2 f(x/n) dx.$$

Вычисления, подобные только что приведенным, дают

$$\begin{aligned} p(S/n) &= 1 - x^* (1 - q_n) & (0 \leq x^* < 1), \\ p(S/n) &= (2 - x^*) q_n & (1 \leq x^* \leq 2), \end{aligned} \quad (6.5)$$

при $x^* = 1$ $p(S/n) = q_n$.

Выражения (6.4), (6.5) являются параметрической формой РХ модели Люса. Исключая параметр x^* из выражений $p(S/s)$ и $p(S/n)$ для $(1 < x^* \leq 2)$, получаем

$$p(S/s) = \frac{q_s}{q_n} p(S/n) \quad (0 < p(S/n) \leq q_n).$$

Исключая параметр x^* для $0 \leq x^* \leq 1$, получаем

$$p(S/s) = \frac{1 - q_s}{1 - q_n} p(S/n) + \frac{q_s - q_n}{1 - q_n} \quad (q_n < p(S/n) \leq 1).$$

Таким образом, РХ модели Люса состоит из двух отрезков.

Иногда для описания экспериментальных данных принимается $q_n = 0,07$. Вычислив математическое ожидание m_n и дисперсию σ_n^2 для плотности вероятности $f(x/n)$, показанной на рис. 6.8, получим $m_n = \frac{1}{2} + q_n$, $\sigma_n^2 = 1 - \frac{1}{2} q_n$. Для $q_n = 0,07$ получим $m_n = 0,57$ и $m_n + \sigma_n \cong 1,55$. Следовательно, порог $x^* = 1$ для $q_n = 0,07$ находится в интервале $(m_n, m_n + \sigma_n)$.

Для того чтобы понять модель Люса, нужно посмотреть, насколько хорошо она соответствует результатам различных экспериментов. Рассмотрим модель в условиях больших значений полезного сигнала s . При этих условиях, как уже указывалось, модель должна обеспечивать, при увеличении величины стимула s , уменьшение вероятности ложной тревоги и увеличение вероятности попаданий. При возрастании величины стимула $s =$ $= m_s$ увеличивается величина $d' = \Delta m / \sigma_n$. Это соответствует переходу с одной РХ на другую (т. е. верхний левый угол на семействе кривых рис. 6.7). При таких переходах уменьшается q_n и одновременно увеличивается интенсивность сигнала, так как возрастает q_s , что в модели Люса равносильно увеличению сигнала s . При переходе с одной РХ на другую вдоль прямой $a-a$, соединяющей точки излома РХ (рис. 6.7), порог остается неизменным: $x^* = 1$. При этом вероятность ложных тревог падает, а вероятность попаданий растет. Это объясняется относительным уменьшением мате-

матических ожиданий $m'_n < m_n$ и увеличением $m'_s > m_s$ вследствие уменьшения q_n и увеличения q_s (рис. 6.7).

Таким образом, даже при фиксированном пороге $x^* = 1$ модель Люса обеспечивает качественные совпадения с экспериментом. В модели Люса, так же как в модели высокого порога, нет взаимно-однозначного соответствия между порогом λ_0 и

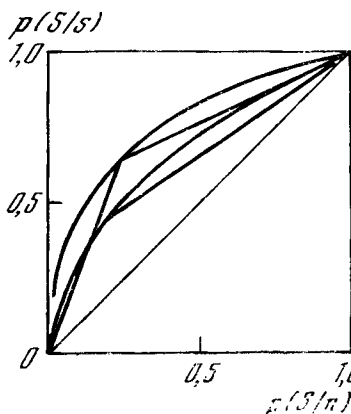


Рис. 6.9. РХ модели Люса

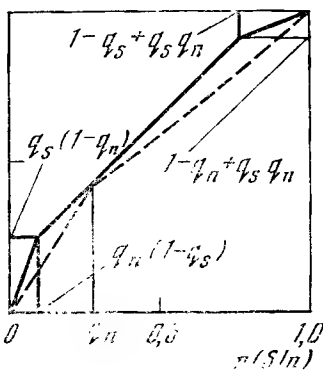


Рис. 6.10. РХ с тремя уровнями квантования

порогом x^* . Порог λ_0 может принимать всего два значения — λ_1, λ_2 , в то время как x^* принимает множество значений в интервале $(0,2)$.

Действительно, пусть параметры q_s, q_n заданы. Тогда определена одна кривая семейства РХ (рис. 6.7). Этой кривой соответствуют два значения порога λ_0 : большее значение порога λ_0 — левому прямолинейному отрезку РХ, меньшее значение λ_0 — ее правому отрезку. Вместе с тем, имея одну характеристику, можно получить любое значение порога x^* в интервале $(0,2)$.

Отсюда следует важное заключение: именно в теории низкого порога нет взаимно-однозначного соответствия между порогом x^* (в смысле Фехнера) и порогом λ_0 в том смысле, в котором он определен в теории решений. Следовательно, порог x^* в этом случае не эквивалентен порогу λ_0 в смысле принятия решений. Может быть сразу несколько пороговых значений стимула, соответствующих λ_0 . Их число зависит от вида функции отношения правдоподобия $\lambda(x)$ и, следовательно, от вида функций $f(x/s)$ и $f(x/n)$.

При сравнении РХ модели Люса с экспериментальными кривыми рис. 6.9 обнаруживается достаточно хорошее соответствие как в области малых, так и в области больших значений вероятностей $p(S/s), p(S/n)$. Это соответствие можно сделать еще лучшим, если перейти к РХ с большим числом линейных участков.

Можно видеть, что в теории высокого и низкого порогов используются модели одного и того же типа. Именно эти модели получают

квантованием функции правдоподобия $\lambda(x)$. При этом в модели высокого порога используется один уровень λ , а в модели низкого порога два уровня: λ_1, λ_2 . В приложении IV рассмотрена модель, в которой используется три значения порога λ .

Рабочая характеристика модели с тремя уровнями представлена на рис. 6.10. Характеристика состоит из трех отрезков. Наклоны этих отрезков к оси абсцисс определяют три значения коэффициента правдоподобия.

§ 4. Функциональное разделение нейронной системы на подсистемы

Взаимосвязь между теорией порога и теорией статистических решений позволяет иначе трактовать задачу обнаружения сигналов человеком и получить важные выводы, касающиеся измерения порогов.

В теории статистических решений функции $f(x/s)$, $f(x/n)$ являются характеристиками полезного сигнала и шума. При описании восприятия те же самые функции могут трактоваться иначе. Другую трактовку должен получить и порог λ_0 . Функцию $\lambda(x)$ и порог λ_0 можно использовать для функционального разделения механизмов на чисто рецептивные механизмы принятия решений и память. Рецептивные механизмы служат для непосредственного преобразования раздражителя (звук, свет) в последовательность импульсов. К таким механизмам следует отнести рецепторы. К другим механизмам следует отнести нейронные цепочки, преобразующие эти импульсы, и цепочки, ответственные за принятие решения. Именно эти механизмы можно описать функцией $\lambda(x)$ и порогом λ_0 . В частности, λ_0 и λ описывают влияние внешних инструкций на принятие решения и влияние информации, содержащейся в памяти.

Подобное разделение всей системы на рецептивную систему, систему принятия решения и память оказывается важным не только с описательной точки зрения. Оно важно также и в практическом отношении. Так, в течение ряда десятилетий в психофизике при экспериментальном определении порога предлагались различные строгие методики для оценки порога. Однако от испытуемого к испытуемому наблюдалась значительная вариабельность результатов. Возможность описания чисто рецептивных процессов и несенсорной информации в терминах функции λ и порога λ_0 позволяет понять и предвидеть изменение порога. Более того, становится ясным, что изменения порога λ_0 (порога x^*) лежат в основе всякого процесса восприятия.

Однако следует иметь в виду, что в рамках теории решений весь процесс восприятия описывается характеристиками некоторого «эквивалентного» сигнала и шума, а именно функцией $\lambda(x)$ и порогом λ_0 , которые также зависят от сигнала $x(t)$ и характеристик

типа цен за правильные и неправильные решения. Таким образом, использование теории статистических решений ограничивает описание процесса восприятия в смысле дальнейшей дифференциации различных функциональных систем, таких, как система памяти и система принятия решения и т. д. Эти системы в рамках статистической теории описываются как одна система.

Возвращаясь к вопросу о существовании порога (дифференциального и абсолютного), поставленному в начале главы, нужно признать полезность предположения о существовании порога x^* . Ни теория принятия решения, ни экспериментальные данные, полученные до настоящего времени, не противоречат этой гипотезе.

Однако теория статистических решений указывает одновременно на ограниченность понятия порога x^* . В частности, как это было показано, теории высокого и низкого порогов существенно «используют» неэквивалентность величин x^* и λ_0 . В опытах с принудительным выбором в двух или нескольких интервалах понятие порога x^* не может быть использовано, так как пространство сигналов оказывается многомерным. С другой стороны, понятие порога λ_0 оказывается здесь применимым (см. Приложение IV).

Теория статистических решений приводит также к пониманию другого важного факта, а именно к пониманию того, что порог λ_0 и порог x^* могут изменяться под влиянием несенсорных факторов. Существует связь от нейронных цепей, ответственных за принятие решения, которая определяет значение порога λ_0 . Эта связь функционирует на основании несенсорной информации и информации, поступающей из памяти. Механизм этой связи изучен пока недостаточно. Теория статистических решений дает возможность получить его строгое описание благодаря функции $\lambda(x)$ и порогу λ_0 , и именно в этом ее существенное значение для теории порога.

Представляется весьма правдоподобным существование абсолютной чувствительности рецепторов. Однако абсолютный порог трудно обнаружить, так как непосредственно за рецептором включены сложные нейронные цепочки, обладающие значительным собственным шумом. Именно эти цепочки определяют вероятность ложной тревоги психометрической функции. Эти цепочки определяют также вариабельность x^* в зависимости от несенсорной информации. Порог x^* можно было бы обнаружить непосредственно на выходе рецептора. Однако «выход рецептора» не обозначен в нейронной цепи. В частности, нельзя быть уверенным, что сигнал снимается с выхода рецептора, а не с какой-либо другой точки, уже охваченной обратной связью от высших отделов системы. Поэтому такой способ обнаружения порога x^* пока вызывает значительные трудности.

Таким образом, одной из важных задач теории порога является изучение изменения порога под влиянием несенсорной информации. В этом случае более общее понятие порога λ_0 в смысле теории статистических решений может сыграть существенную роль.

ПСИХОФИЗИЧЕСКИЕ ЗАКОНЫ

§ 1. М-функция как характеристика дифференциальной чувствительности

Значение М-функции не исчерпывается характеристикой абсолютной чувствительности детектора. Она может также использоваться (и в этом, быть может, ее основное значение) для характеристики дифференциальной чувствительности детектора.

Под дифференциальной чувствительностью при этом понимается способность отличать один сигнал от другого. Таким образом, используя М-функцию, можно описать «собственное пространство» детектора, в котором производится различение сигналов. Для выяснения того, как определяется М-функция дифференциальной чувствительности, достаточно построить ее для частного случая нормальных апостериорных плотностей вероятности $f(x/s)$ и $f(x/n)$.

Пусть необходимо принять решение о том, различны ли по величине два сигнала s и s_1 . Сигналы s_1 и s различаются детектором, обладающим собственным шумом. Следовательно, наблюдаемыми сигналами являются либо $x(t) = s + n$, либо $x(t) = s_1 + n$.

Пусть для принятия решения используется шкала отношения правдоподобия. Тогда можно определить РХ решения аналогично тому, как это делалось для случая абсолютной чувствительности (уравнение (6.1)).

Если принять

$$f(x/s) = (2\pi D)^{-\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{(x-s)^2}{2D} \right],$$

$$f(x/n) = (2\pi D)^{-\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{(x-s_1)^2}{2D} \right],$$

то для вероятности попадания $p(S/s)$ и вероятности ложной тревоги $p(S/n)$ можно записать согласно (6.1)

$$p(S/s) = \operatorname{erfc} \left(\frac{x^* - s_1}{\sigma} \right), \quad p(S/n) = \operatorname{erfc} \left(\frac{x^* - s}{\sigma} \right)$$

или

$$p(S/s) = \operatorname{erfc}(\theta^* - \Delta'), \quad p(S/n) = \operatorname{erfc} \theta^*, \quad (7.1)$$

где $\theta^* = (x^* - s)/\sigma$; $\Delta' = (s_1 - s)/\sigma = \Delta s/\sigma$, θ^* — порог, при котором принимается решение. Первое уравнение (7.1) аналогично уравнению (6.1) и определяет М-функцию дифференциальной чувствительности.

Как следует из уравнения (7.1), при оценке дифференциальной чувствительности вероятность попадания $p(S/s)$ является функцией параметра Δ' . Значение Δ' , при котором $p(S/s) = 1/2$, называется *дифференциальным порогом*, а соответствующее значение Δs^* в выражении $\Delta'^* = \Delta s^*/\sigma$ — *разностным порогом*.

Из равенства $p(S/s) = 1/2$ следует

$$\theta^* = \Delta' \quad \text{или} \quad x^* = s_1. \quad (7.1a)$$

Таким образом, дифференциальному порогу $\Delta^* = \theta^*$ соответствует порог $x^* = s_1$ на оси стимулов.

Если $x^* = s_1$, то из выражения для θ^* следует

$$\Delta s^* = \sigma \theta^*. \quad (7.2)$$

Величина θ^* определяется допустимой вероятностью ложной тревоги $p(S/n)$ и, следовательно, при выбранном критерии является заданной.

В случае немонотонных апостериорных плотностей $f(x/s)$ и $f(x/n)$ вероятности $p(S/s)$ и $p(S/n)$ имеют вид (3.1). Как было установлено в главе 6, в этом случае М-функция зависит от параметров

$$\mu = \sigma/\sigma_1, \quad \Delta' = \Delta s/\sigma_1. \quad (7.3)$$

§ 2. Закон Вебера

Закон Вебера устанавливает зависимость между «ощутимым приращением» сигнала Δs (стимула) и величиной стимула, а именно имеет место соотношение

$$\Delta s/s = k = \text{const}. \quad (7.4)$$

Под «ощутимым приращением» подразумевается значение Δs , которое обнаруживается с вероятностью, равной $1/2$.

Функция Вебера $\Delta s = \psi(s)$, определенная экспериментально, удовлетворяет линейному закону (7.4) только для некоторого диапазона интенсивности сигнала s . Для малых и больших значений s функция $\psi(s)$ не совпадает с прямой (7.2). Фехнер [12] и Гильфорд (см. [14]) предложили лучшую аппроксимацию экспериментальных кривых функцией вида

$$\Delta s = k(s_0 + s)^p, \quad (7.5)$$

где k , s_0 , p — константы, определяемые из опыта.

Закон Вебера определяет восприятие слабых сигналов на фоне собственных шумов. Следовательно, теория обнаружения не должна противоречить этому закону, и можно надеяться, пользуясь

ее результатами при некоторых дополнительных предположениях, получить закон Вебера.

Здесь предполагается, что закон Вебера связан с внутренними шумами нейронной системы. При этом не важно, где именно осуществляется преобразование вида (7.4): в рецепторах или нейронных цепочках более высокого уровня, ответственных за принятие решения (формирование порога λ_0). Например, существует гипотеза, что преобразование вида (7.4) осуществляется непосредственно в рецепторах. Излагаемая ниже теория не противоречит этому предположению. Она просто пытается объяснить закон (7.4).

Для этого рассмотрим обнаружение приращения Δs сигнала s в собственном шуме нейронной системы.

Предполагается, что математическое ожидание m_s условной плотности вероятности $f(x/s)$ равно s . Это означает, что среднее значение шума m_n той части нейронной цепи, которая оказывается включенной при наличии сигнала, значительно меньше s . В общем случае это условие может не выполняться.

На систему действует полезный сигнал $s + \Delta s$. Далее этот сигнал смешивается с собственным шумом нейронной системы, и для принятия решения о наличии или его отсутствии (двухальтернативная гипотеза) используется уже сигнал $x(t)$, являющийся смесью $s + \Delta s$ с собственным шумом нейронной системы. Естественно принять, что нейронная система работает по правилу отношения правдоподобия. Тогда следует рассмотреть две апостериорные плотности вероятности. Плотность вероятности при наличии шума определяется здесь функцией $f(x/s)$, а при наличии полезного сигнала есть функция $f(x/s + \Delta s)$. Примем, что апостериорные плотности вероятности — гауссовские. Тогда, в соответствии с уравнением (7.1а), можно записать

$$x^* = m_s = s + \Delta s. \quad (7.6)$$

Уравнение (7.6) можно понять, обращаясь к рис. 7.1, где вверху изображены $f(x/s)$ и $f(x/s + \Delta s)$ и ниже, в соответствии с верхним рисунком, приведена М-функция.

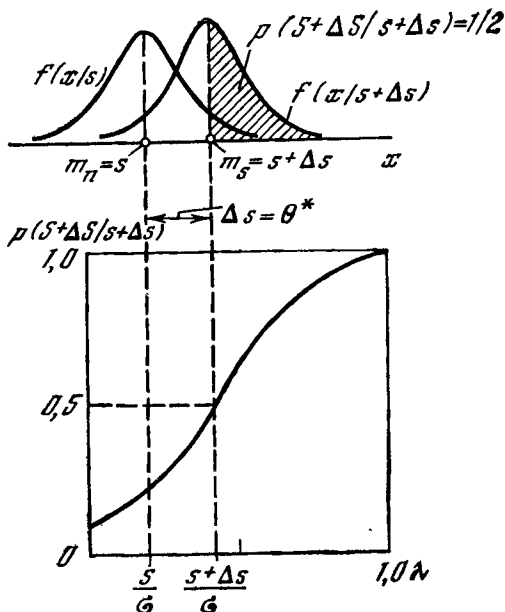
Для абсолютного порога, когда $s = 0$, величина ΔS определяется на фоне собственных шумов. Для дифференциального порога величина Δs является приращением сигнала s , которое обнаруживается с вероятностью $p(S + \Delta S/s + \Delta s) = 1/2$, равной заштрихованной площади под кривой $f(x/s + \Delta s)$ на рис. 7.1.

Из уравнения (7.2) получаем

$$\Delta s^* = \sigma \theta^*.$$

Из этого выражения можно заключить, что если нейронная система использует правило отношения правдоподобия, то дифференциальный порог Δs^* зависит от интенсивности внутреннего шума σ и допустимой вероятности ложной тревоги (параметр θ^*). Как и следует ожидать, разностный порог Δs^* возрастает с увеличением внутреннего шума. С другой стороны, порог Δs^* уменьшается

Р и с. 7.1. Дифференциальный порог зрительного анализатора



при увеличении вероятности ложной тревоги (уменьшении θ^*). Это легко видеть из рис. 7.1.

Для того чтобы имел место закон Вебера, следует предположить, что внутренний шум зависит от сигнала s . В частности, по (7.2) необходимо, чтобы среднеквадратичное значение шума пропорционально увеличивалось с увеличением s . Если положить

$$\sigma = bs, \quad (7.7)$$

то закон Вебера будет иметь место. Действительно, согласно (7.2) и (7.7) имеем

$$\Delta s = \theta^* bs, \quad (7.8)$$

т. е. имеет место закон Вебера.

Однако следует заметить, что с увеличением σ будет возрастать (вместе с s) вероятность ложной тревоги. Увеличение вероятности ложной тревоги связано с увеличением дисперсии плотности вероятности $f(x/s)$. Этот факт еще ждет своего экспериментального подтверждения. Если в эксперименте при определении дифференциального порога Δs^* для различных s поддерживать вероятность ложной тревоги $p(S + \Delta S/s)$ постоянной, то при предположении (7.7) закон Вебера не будет иметь место, так как с изменением величины s будет изменяться θ^* в (7.2).

В рассмотренной модели восприятия слабых сигналов на уровне собственных шумов предполагалась несмещенность математических ожиданий

$$m_{s+\Delta s} = s + \Delta s, \quad m_s = s, \quad (7.9)$$

Однако это условие может не выполняться, если внутренние шумы имеют отличное от нуля математическое ожидание или смешиваются с сигналом нелинейно. В этом случае условные плотности вероятности $f(x/m_s)$ и $f(x/m_n)$ имеют математические ожидания $m_s(s + \Delta s)$, $m_n(s)$, являющиеся некоторыми функциями от s . Задача состоит теперь в том, чтобы оценить эти функции. Затем для построения модели необходимо найти зависимость

$$\Delta s = \psi(s). \quad (7.10)$$

Проверка закона Вебера в этом случае становится значительно сложнее.

§ 3. Анализ влияния собственных шумов зрительного анализатора

Для того чтобы представить себе более точный характер внутренних шумов, важно рассмотреть полную модель анализатора. В качестве примера возьмем зрительный анализатор.

Предлагаемая ниже модель зрительного анализатора, основанная на нейрональном источнике шума, дает возможность получить закон Вебера. Эту модель можно считать достаточно правдоподобной, хотя нет прямых подтверждений ее в эксперименте. В частности, как указывалось раньше, неясно, в какой части нейронной цепи собственный шум играет основную роль. Однако предлагаемая модель имеет большое значение для построения математических моделей на основе статистической теории решений.

В зрительном анализаторе можно обнаружить три основных источника внутренних шумов.

Первый источник шума связан со спонтанным разложением зрительного пигмента. Впервые так называемая спонтанная активность нейронной системы в отсутствие шума была обнаружена Фехнером [12], который обнаружил отклонение от закона Вебера при низкой интенсивности сигнала. Киффбер, Фицхуг, Барлоу (см. [24]) наблюдали спонтанные разряды в ганглиозных клетках кошки, находящейся в полной темноте. Они предположили, что такие разряды могли появиться в результате разложения зрительного пигмента, возбуждения дендритных окончаний случайным электрическим сигналом или каких-либо других причин.

Спонтанная активность эквивалентна наличию стимула малой интенсивности, т. е. так называемому темновому свету. Следствием спонтанной активности является абсолютный порог s_0 в (7.5). Грегори (см. [14]) оценивал s_0 , экстраполируя кривую $\phi(\Delta s)$ до пересечения ее с абсциссой. Барлоу (см. [24]) строил кривую $\ln \phi(\Delta s)$ в функции от $\ln s$ и брал значение s , при котором кривая пересекает ось ординат. Спонтанная активность изменяет математическое ожидание функций $f(x/s)$ и $f(x/n)$.

Вторым важным источником шума являются неустраняемые флуктуации стимула, связанные с квантовой природой света. Этот шум связан с флуктуацией числа квантов света, поглощаемых рецептором от источника света постоянной интенсивности. Флуктуации описываются функцией распределения Пуассона. Когда среднее число поглощенных квантов в единицу времени от лампы с интенсивностью s равно ν , то имеет место соотношение

$$m_s \nu = g (s + s_0), \quad (7.11)$$

где g — константа; s_0 — «темновая» интенсивность; m_s — средний эффект на выходе нейронной цепи от поглощения одного фотона (кванта).

Если единственным источником шума являются кванты света, то дифференциальный порог определяется по (7.2). Случайное число поглощенных квантов m описывается законом Пуассона

$$P(m) = \frac{\nu^m}{m!} e^{-\nu}, \quad (7.12)$$

где $P(m)$ — вероятность поглощения m квантов, если среднее число поглощенных в единицу времени квантов равно ν .

При этом среднеквадратичное значение σ в (7.2) для закона Пуассона равно

$$\sigma = \sqrt{\nu}. \quad (7.13)$$

На основании (7.2), (7.11), (7.13)

$$\Delta s^* = \theta^* \left(\frac{g}{m_s} \right)^{1/2} (s + s_0)^{1/2}. \quad (7.14)$$

Отсюда видно, что модель, основанная на двух указанных выше источниках шума, не приводит к закону Вебера. Однако экспериментальное подтверждение закона корня квадратного (7.14) было получено для раздражителей малой интенсивности Барлоу, Трейсман [24].

Таким образом, два указанных источника шума не приводят к закону Вебера. Поэтому следует попытаться рассмотреть другой источник шума в надежде на то, что последний позволит получить закон Вебера.

Третий источник шума должен быть общим для всех модальностей, так как закон Вебера имеет место для всех модальностей. Таким третьим источником шума может быть нейрональный шум, т. е. собственный шум нейронов. Относительно этого источника имеется мало данных. Для построения модели будут сделаны два предположения, касающиеся нейронального источника шума: 1) поглощение кванта света вызывает в нейронной системе случайный сигнал со средней интенсивностью m_s и дисперсией σ_s^2 ; 2) если m квантов поглощено рецепторами, то случайный сигнал

в нейронной системе, на основании которого принимается решение, имеет вид

$$\sum_{i=1}^m s_i.$$

Таким образом, система рецепторов подобна ряду параллельных цепей (линий передачи импульсов), каждая из которых связана с одним рецептором, причем параллельные цепи содержат внутренние источники шума.

Пусть на сетчатку (рецепторное поле) действуют фотоны. За время T случайное число m фотонов, попавших на сетчатку, подчиняется закону Пуассона (7.12), где ν — среднее число фотонов, попадающих на рецепторы в единицу времени.

Поглощение i -го фотона вызывает случайный сигнал X_i на выходе i нейронной цепочки со средним значением m_s и дисперсией σ_s . Сигналы со всех нейронных цепочек суммируются и дают случайный сигнал

$$X = \sum_{i=1}^m X_i, \quad (7.15)$$

где случайным является также и число фотонов m .

Среднее значение $M(X)$ сигнала X равно

$$M(X) = M\left(\sum_{i=1}^m X_i\right) = \nu m_s, \quad (7.16)$$

что непосредственно следует из соотношения

$$M(X) = M\left[M\left(\sum_{i=1}^m X_i\right) \middle| m\right] = m_s M(m) = \dots$$

Дисперсия сигнала X на основании (7.15) и (7.16) равна

$$\sigma^2 = M\left(\sum_{i=1}^m X_i - \nu m_s\right)^2 = M[M(\sum X_i - \nu m_s)^2/m], \quad (7.17)$$

или

$$\sigma^2 = M\left[M\left(\sum_{i,j=1}^m (X_i - m_s)(X_j - m_s)\right) + m^2 (m_s)^2 - 2\nu m (m_s^2) + \nu^2 (m_s)^2\right],$$

или, наконец,

$$\sigma^2 = M\left(\sum_{i,j=1}^m k_{ij}\right) + \nu (m_s)^2,$$

где k_{ij} — корреляционный момент связи величин X_i и X_j .

Последнее отношение получено при использовании формулы

$$M(m^2) = \nu^2 + \nu,$$

справедливой для закона Пуассона.

Пусть теперь

$$k_{ij} = \sigma_s^2. \quad (7.18)$$

Это означает, что случайные величины X_i линейно зависимы. Тогда выражение для σ^2 с учетом (7.16) примет вид

$$\sigma^2 = (\nu^2 + \nu) \sigma_s^2 + \nu (m_s)^2. \quad (7.19)$$

Если теперь учесть (7.11), то (7.19) можно записать в виде

$$\sigma^2 = \frac{\sigma_s^2}{m_s^2} g^2 (s + s_0)^2 + \frac{\sigma_s^2}{m_s^2} g (s + s_0) + g m_s (s + s_0). \quad (7.20)$$

Тогда согласно (7.2)

$$\Delta s^* = \theta^* \sigma = \theta^* \sqrt{g^2 \gamma^2 (s + s_0)^2 + g m_s (1 + \gamma^2) (s + s_0)}, \quad (7.21)$$

где $\gamma = \sigma_s/m_s$ — коэффициент относительной вариации нейронной цепочки, проводящей импульсы от рецептора.

Таким образом, при малых $\gamma \ll 1$ имеет место

$$\Delta s^* = \theta^* m_s^{1/2} g^{1/2} (s_0 + s)^{1/2}. \quad (7.22)$$

Однако с увеличением сигнала s уравнение (7.21) приводит к закону Вебера, так как для $g\gamma^2 (s + s_0) \gg m_s (1 + \gamma^2)$ имеет место

$$\Delta s^* = \theta^* g \gamma (s + s_0). \quad (7.23)$$

Сделанное предположение относительно нейронного шума охватывает оба случая. При малых значениях интенсивности сигнала s и малых значениях γ зрительный анализатор ведет себя как квадратичный детектор. При больших значениях s получается линейный закон (7.23), т. е. закон Вебера.

В основу вывода этого закона (7.21) для дифференциального порога было положено предположение (7.18) о сильной коррелированности соседних каналов, проводящих импульсы от рецепторов в нейронную систему. Это предположение требует экспериментальной проверки и дополнительного теоретического обоснования.

§ 4. Законы пространственной и временной суммации

Интересно попытаться использовать шкалу отношения правдоподобия для получения других психофизических законов. В частности, для зрительного анализатора нетрудно на основании этой шкалы получить законы пространственной и временной суммации раздражителя. Это законы Райса — Розе [21, 26] для зависимости порогового значения яркости от яркости фона, закон Пьерона для зависимости порогового значения яркости от площади и, наконец,

закон для порогового значения яркости в зависимости от времени действия стимула (закон Пайпера).

Чтобы получить эти три закона, следует рассмотреть задачу обнаружения слабого светового сигнала яркости E на некотором световом фоне, имеющем яркость B . Эксперимент может проводиться по следующей схеме. Световой сигнал снимается с генератором сигнала (лампа) и после прохождения через фильтр воздействует на глаз подопытного животного. Сигнал фона обычно создается специальным рассеивающим фильтром и в течение всего времени поддерживается на заданном уровне.

В течение коротких интервалов времени на сетчатку воздействует полезный сигнал E , поступающий с того же генератора сигналов. Выходной сигнал может сниматься при помощи микроэлектрода в разных точках за рецептором. В последнее время были предприняты попытки объяснить законы пространственной и временной суммации квантовой природой света.

Такая гипотеза кажется вполне убедительной, так как при малых значениях фоновой яркости B доминирующими являются, по-видимому, флуктуации числа квантов света, попадающих на сетчатку. Однако при значительной величине яркости B имеет место закон Вебера (§ 3). Тогда объяснение законов пространственной и временной суммации квантовой природой света оказывается неприемлемым.

Если считать, что законы суммации определяются флуктуацией числа поглощенных сетчаткой фотонов, то можно легко получить нужные зависимости, не прибегая к детальному описанию нейронной системы, так как законы проявляются уже на уровне рецепторов.

Пусть за время T на участок сетчатки площадью A попало N фотонов. Число N является случайным, и, как известно, вероятность $p(N)$ появления N фотонов определяется законом Пуассона

$$p(N) = \frac{N^{\nu}}{N!} e^{-\nu}.$$

Параметр ν закона Пуассона зависит от яркости источника света.

При отсутствии полезного сигнала, когда действует сигнал фоновой интенсивности B , среднее число фотонов, попадающих на сетчатку за время T , равно

$$\nu_n = m_n = BAT. \quad (7.24)$$

При наличии полезного сигнала яркости E , уменьшающего яркость B , параметр ν равен

$$\nu_s = m_s = (B - E) AT. \quad (7.25)$$

Среднеквадратичные значения числа фотонов для двух состояний соответственно равны

$$\sigma_s = \sqrt{(B - E) AT}, \quad \sigma_n = \sqrt{BAT}.$$

Ввиду малости E можно приближенно считать, что

$$\sigma_s = \sigma_n = (BAT)^{1/2}. \quad (7.26)$$

Известно, что распределение Пуассона с достаточной точностью аппроксимируется нормальным. Речь идет об аппроксимации дискретной случайной величины N случайной величиной

$$y = (N - v)/\sqrt{v}, \quad (7.27)$$

являющейся относительным отклонением величины N от своего математического ожидания v . При этом плотность вероятности $f(y)$ величины y является нормальной и имеет вид

$$f(y) = (2\pi)^{-1/2} \exp(-y^2/2).$$

Это приближение тем точнее, чем меньше величина $y^2/\sqrt{v}$. Так, при $\sqrt{v} = 10$ приближение оказывается уже достаточно точным.

Если величина y является нормальной, то величина N , связанная с ней линейной зависимостью, также нормальна. При гипотезах $E = 0$ и $E \neq 0$ она имеет параметры v_n и v_s .

Для нормальных апостериорных плотностей $f(x/s)$ и $f(x/n)$ можно теперь определить параметр d'

$$d' = \frac{m_s - m_n}{\sigma} = \frac{EAT}{(BAT)^{1/2}}. \quad (7.28)$$

Из этого выражения можно получить закон Райса — Розэ. Действительно, для постоянной вероятности обнаружения величина $d' = \text{const}$ (6.1). Тогда согласно (7.28)

$$E = d'(AT)^{-\frac{1}{2}} B^{\frac{1}{2}} = kB^{\frac{1}{2}}. \quad (7.29)$$

Это есть закон Райса — Розэ. Пороговая сила света при малых значениях яркости B возрастает пропорционально $B^{1/2}$.

Эффект пространственной суммации при восприятии светового стимула участком сетчатки проявляется в том, что при освещении меньшего участка сетчатки яркость стимула кажется меньшей по сравнению с яркостью при освещении большего участка, хотя яркость источника света поддерживается в этих двух случаях постоянной. Таким образом, субъективное ощущение яркости зависит от площади сетчатки, на которую воздействует свет. Соотношение, связывающее порог яркости E с величиной площади A , имеет вид

$$EA^m = k = \text{const}.$$

Это соотношение, известное как закон Пьерона [20], показывает, что порог видимой яркости уменьшается с увеличением площади. Величина показателя m обычно колеблется в пределах 0,5—1. Ясно, что при одной и той же яркости с большей площади в глаз

поступает больше света, чем от меньшей. Если $m = 1$, то имеет место так называемая совершенная суммация. Площадь и яркость являются взаимозаменяемыми факторами. В форме

$$EA = k$$

соотношение известно под именем закона Рикко. Уравнение (7.28) позволяет получить закон Пьерона с $m = 1/2$, так как при $d' = \text{const}$

$$E = d' B^2 \left(T \right)^{-\frac{1}{2}} A^{-\frac{1}{2}} = k_1 A^{-\frac{1}{2}}. \quad (7.30)$$

Экспериментальные данные Пьерона дают $m = 0,3$. Таким образом, соотношение (7.30) является хорошим приближением к экспериментальным данным. Эффект временной суммации также проявляется в уменьшении порога яркости E с увеличением времени воздействия света на сетчатку. В простейшем случае этот эффект описывается соотношением

$$ET = \text{const}. \quad (7.31)$$

Согласно (7.31) количество света, падающего на сетчатку, остается постоянным и зависит от яркости E и от длительности стимула T . В соотношении (7.31) время T и яркость E изменяются в определенных границах, так как E не может возрастать безгранично при $T = 0$. Максимальное время, в течение которого происходит аккумуляция света, равно приблизительно 200 мсек для очень тусклого света и 50 мсек для очень яркого света.

Более общую форму закона временной суммации можно получить в виде

$$ET^m = k_2 = \text{const}.$$

В такой форме закон сразу следует из (7.28) для $m = 1/2$:

$$E = k_2 T^{-\frac{1}{2}}. \quad (7.32)$$

В таком виде закон действительно был подтвержден Пайпером.

Таким образом, пользуясь шкалой отношения правдоподобия, удается объединить, казалось бы, совершенно разные законы в один, выражаемый соотношением (7.28). Зависимость (7.28) уже была получена при выводе закона Вебера точно при тех же самых условиях. Именно в § 3 предполагалось, что основными источниками шума являются квантовая природа света и так называемый темновой шум зрительного анализатора.

Однако, пользуясь шкалой отношения правдоподобия, удастся доказать больше. Как показано в § 3 этой главы, при больших значениях B закон (7.29) должен перейти в закон Вебера. Это объясняется тем, что квантовый характер света перестает играть основную роль. Основным источником флуктуаций при больших яркостях B является внутренний шум нейронов, следствием которого при некоторых предположениях является закон Вебера.

ВОСПРИЯТИЕ КАК ДИНАМИЧЕСКИЙ ПРОЦЕСС

§ 1. Обнаружение сигналов,
являющихся функциями времени

В предыдущих главах был описан процесс принятия решения нейронной системой, для которого использовалось отношение правдоподобия. При этом считалось, что имеется статическая картина: либо на систему действует сигнал $s \neq 0$, либо на систему действует один шум n , и каждое из этих состояний продолжается теоретически бесконечно долгое время.

В действительности процесс восприятия оказывается более сложным. Полезный сигнал $s(t)$ и шум $n(t)$ являются функциями времени и действуют на систему в течение некоторого интервала времени $(0, T)$. Следовательно, восприятие протекает во времени, т. е. является динамическим процессом.

В настоящей главе мы распространим метод отношения правдоподобия на описание восприятия в этом общем случае. Для этого следует определить отношение правдоподобия для сигналов, являющихся функциями времени. Такое определение уже имелось в примерах 2.1 и 3.3 (во второй и третьей главах). Следовательно, остается только несколько развить эту технику и получить результаты.

Вначале рассмотрим задачу обнаружения сигнала известной формы $s(t)$ в шуме $n(t)$.

В простейшем случае можно предположить, что полезный сигнал $s(t)$ и шум $n(t)$ смешиваются аддитивно и наблюдается сигнал

$$x(t) = s(t) + n(t), \quad (0 \leq t \leq T). \quad (8.1)$$

Затем следует рассмотреть конечное число значений сигнала $x(t)$ в точках $t_k = k\Delta t = \frac{k}{n}T$ ($1 \leq k \leq n$)¹.

Значения сигнала $x(t)$ в точках t_k описываются функциями совместной условной плотности вероятности

$$f_1(x) = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad f_2(x) = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

¹ Здесь рассматриваются значения сигнала в равноотстоящих точках. Однако от этого условия можно отказаться.

соответственно при гипотезах H_1 и H_2 . После этого можно записать отношение правдоподобия

$$\lambda(x) = f_2(x)/f_1(x).$$

Решающее правило состоит в том, что это отношение сравнивается с порогом λ_0 . Таким образом, решающее правило остается прежним. В частности, если принимается байесовское оптимальное решение, то порог λ_0 выбирается в соответствии с (3.8). Здесь особенно отчетливо выступает преимущество шкалы отношения правдоподобия по сравнению со шкалой значения стимула. Последняя является многомерной, так как $x(x_1, x_2, \dots, x_n)$ есть вектор размерности n , в то время как шкала $\lambda(x)$ остается одномерной. Если считать случайные величины $n_k = n(t_k)$ статистически независимыми и распределенными нормально, то плотность вероятности $f_1(x)$ запишется в виде

$$f_1(x) = (2\pi D)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{2D}\right), \quad (8.2)$$

где $D = D(n_k)$ — дисперсия случайной величины X_k . Аналогично (8.2) плотность вероятности $f_2(x)$ можно записать так:

$$f_2(x) = (2\pi D)^{-n/2} \exp\left(-\sum_{k=1}^n \frac{(x_k - s_k)^2}{2D}\right), \quad (8.3)$$

где $s_k = s(t_k)$.

Таким образом, при наличии сигнала $s(t)$ случайные величины x_k независимы и имеют средние значения s_k ($k = 1, 2, \dots, n$). Отношение правдоподобия на основании (8.2) и (8.3) принимает вид

$$\lambda(x) = \exp\left(\sum_{k=1}^n \frac{2s_k x_k - s_k^2}{2D}\right). \quad (8.4)$$

Наблюдатель выбирает гипотезу H_1 , если $\lambda(x) < \lambda_0$ или (в силу монотонности $\lambda(x)$) если $\ln \lambda(x)$ удовлетворяет условию

$$\sum_{k=1}^n s_k x_k < \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n s_k^2 + D \ln \lambda_0.$$

Умножая неравенство на Δt , получим

$$\Delta t \sum_{k=1}^n s_k x_k < \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^n s_k^2 + \Delta t D \ln \lambda_0. \quad (8.5)$$

Таким образом, для принятия решения наблюдатель использует величину

$$G_n = \Delta t \sum_1^n s(t_k) x(t_k), \quad (8.6)$$

сравнивая ее с некоторым фиксированным значением g_0 , определенным в соответствии с принятым критерием. В n -мерном пространстве с координатами x_k поверхность решений

$$\sum_1^n s_k x_k = \text{const} \quad (8.7)$$

является гиперплоскостью, перпендикулярной вектору $s (s_1, s_2, \dots, s_n)$.

Такой результат получается только в том случае, если случайные величины n_k независимы и имеют одинаковые дисперсии. Если это не так, то разделяющая граница может быть весьма сложной поверхностью в n -мерном пространстве.

Если делать измерения через малые интервалы Δt , то в пределе при $n \rightarrow \infty$ величина G будет равна

$$G = \int_0^T s(t) x(t) dt. \quad (8.8)$$

Таким образом, наблюдатель может использовать для принятия решения статистику G , равную скалярному произведению входного сигнала $x(t)$ и ожидаемого сигнала $s(t)$. Сравнивая статистику G с некоторым критическим значением g_0 , можно принять решение в пользу гипотезы H_1 , если $G < g_0$, и в пользу гипотезы H_2 , если $G \geq g_0$. Значение g_0 определяется одним из принятых критериев.

Статистика G является случайной величиной, так как согласно (8.8) она зависит от случайной функции $x(t)$. Ее можно охарактеризовать одной из условных плотностей вероятности $p_1(g)$ и $p_2(g)$ соответственно при условии первой и второй гипотез. Если $G > g_0$, когда сигнала нет, совершается ошибка первого рода или имеет место ложная тревога.

Вероятность ложной тревоги определяется интегралом

$$\alpha = \int_{g_0}^{\infty} p_1(g) dg, \quad (8.9)$$

величина g_0 равна пороговому значению g , при котором принимается решение.

Когда сигнал $s(t)$ есть, а система указывает на его отсутствие, совершается ошибка второго рода. Вероятность β этой ошибки равна

$$\beta = \int_{-\infty}^{g_0} p_2(g) dg. \quad (8.10)$$

Выражения (8.9), (8.10) в случае простого сигнала $s = \text{const}$, как и следовало ожидать, аналогичны соответствующим выражениям для α и β .

Для построения РХ необходимо знать вероятность правильного решения о гипотезе H_2 (вероятность попадания). Эта вероятность равна

$$p(S/s) = 1 - \beta = \int_{s_0}^{\infty} p_2(x) dx. \quad (8.11)$$

В случае, когда процесс $n(t)$ является гауссовским, условные плотности $p_1(x)$ и $p_2(x)$ также будут гауссовскими. Это непосредственно следует из выражения

$$G_n \simeq \Delta t \sum_1^n s_k x_k, \quad (8.12)$$

откуда видно, что статистика G_n есть линейная комбинация нормальных случайных величин x_k ($k = 1, 2, \dots, n$) и, следовательно, является гауссовской величиной.

В предельном случае (8.8) статистика остается нормально распределенной случайной величиной. Для характеристики нормального распределения достаточно знать два момента — математическое ожидание и дисперсию.

Математическое ожидание условной плотности $p_1(x)$, очевидно, равно нулю, если предположить, что $M[n(t)] \equiv 0$.

Условное математическое ожидание плотности $p_2(x)$ равно

$$M[G_n/H_2] = M\left[\Delta t \sum_1^n s_k (s_k + n_k)\right] = \Delta t \sum_1^n s_k^2.$$

При $n \rightarrow \infty$ сумма переходит в интеграл

$$E_s = M[G/H_2] = \int_0^T s^2(t) dt. \quad (8.13)$$

Дисперсии $D[G]$ условных плотностей p_1 и p_2 одинаковы.

Вычисление дисперсии статистики основывается на простых свойствах математического ожидания. На основании (8.8)

$$\begin{aligned} D[G] &= M\left[\int_0^T s(t) x(t) dt - E_s\right]^2 = M\left[\int_0^T s(t) n(t) dt\right]^2 = \\ &= \iint_0^T s(t_1) s(t_2) M(n(t_1) n(t_2)) dt_1 dt_2 = \\ &= \iint_0^T s(t_1) s(t_2) k(t_1 - t_2) dt_1 dt_2. \end{aligned}$$

В последнем равенстве используется перестановочность математического ожидания и интеграла. В двойном интеграле $k(t_1 - t_2) = M[n(t_1)n(t_2)]$ есть корреляционная функция процесса $n(t)$. В наиболее интересном случае $k(t_1 - t_2) = \frac{N_0}{2} \delta(t_1 - t_2)$, где $\delta(\cdot)$ — дельта-функция Дирака, $N_0/2$ — спектральная плотность белого шума. Это соответствует белому шуму $n(t)$ с неограниченной полосой частот. Тогда

$$D = \frac{N_0}{2} \iint s(t_1)s(t_2)\delta(t_1 - t_2)dt_1dt_2 = \frac{N_0}{2} E_s. \quad (8.14)$$

Следует заметить, что выражение дисперсии (8.14) для нашей задачи является приближенным. Действительно, в (8.2) предполагается, что случайная функция $n(t)$ имеет конечную дисперсию D . Это возможно только в том случае, если $n(t)$ — белый шум в полосе частот $(-\omega_c, \omega_c)$. Тогда $D = N_0\omega_c/2\pi$, где $N_0/2 = \text{const}$ есть спектральная плотность функции $n(t)$. Вместе с тем (8.14) справедливо только для $\omega_c = \infty$.

Таким образом, (8.14) является приближением для больших значений ω_c . Остается записать явные выражения для нормальных плотностей вероятностей p_1 и p_2

$$\begin{aligned} p_2(g) &= (\pi N_0 E_s)^{-\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{(g - E_s)^2}{N_0 E_s} \right], \\ p_1(g) &= (\pi N_0 E_s)^{-\frac{1}{2}} \exp \left(-\frac{g^2}{N_0 E_s} \right). \end{aligned} \quad (8.15)$$

Вероятность ложной тревоги на основании (8.9) равна $\alpha = \text{erfc } x$,

$$(8.16)$$

где $x = g_0 \sqrt{2/N_0 E_s}$.

Вероятность обнаружения на основании (8.11) равна

$$p(S/s) = \text{erfc}(x - d'), \quad (8.17)$$

где $d' = \sqrt{2E_s/N_0}$, и функция $\text{erfc } x$ определяется соотношением

$$\text{erfc } x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2/2} dt. \quad (8.18)$$

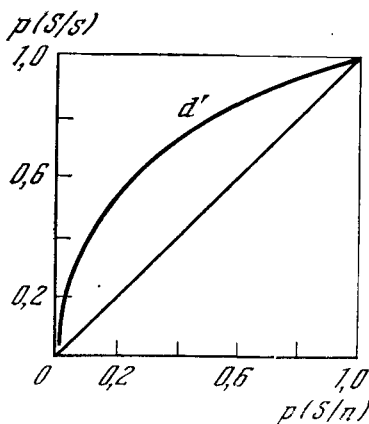
Величина d' называется отношением сигнал/шум. Она является обобщением ранее введенной величины d' для постоянного сигнала s .

Уравнения (8.16) и (8.17) задают в параметрической форме уравнение РХ процесса решения. Если исключить параметр x из этих уравнений, то получается РХ, представленные на рис. 8.1.

Рабочие характеристики зависят от величины d' , характеризующей относительную интенсивность полезного сигнала по отношению к шуму $n(t)$.

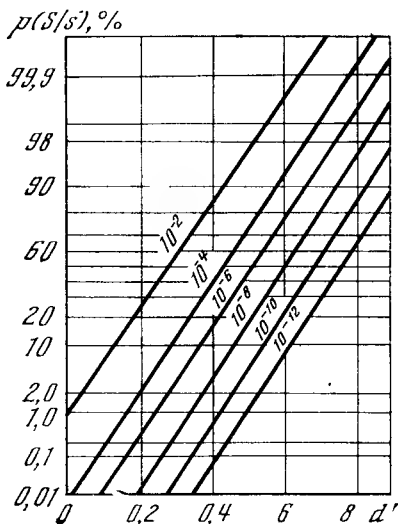
В логарифмическом масштабе величина $p(S/s)$ является линейной функцией d' . На рис. 8.2 в вероятностном масштабе показано семейство кривых $p(S/s)$ как функций d' в зависимости от вероятности ложной тревоги α .

Функционирование системы, принимающей решение в этом более общем случае, оказывается вполне аналогичным ее работе при простейшем сигнале $s = \text{const}$. Действительно, система на



Р и с. 8.1. p -X сигнала, являющегося функцией времени

Р и с. 8.2. Вероятность попадания как функция параметра



основании наблюдения сигнала $x(t)$, $t \in (0, T)$, использует для решения статистику G (8.8), которая равносильна отношению правдоподобия λ .

Далее для решения используется правило $G \geq g_0$, эквивалентное правилу $\lambda(x) \geq \lambda_0$. В соответствии с этим правилом пространство с координатами $x_1, x_2, \dots, x_n$ делится на две непересекающиеся области Ω_1 и Ω_2 : если $x \in \Omega_1$ — принимается H_1 , если $x \in \Omega_2$ — принимается H_2 .

В простейшем случае независимых равноточных измерений (независимость величин n_k) разделяющей поверхностью в n -мерном пространстве является плоскость, определяемая уравнением (8.7). В другом случае разделяющая поверхность будет более сложной. Вероятность обнаружения $p(S/s)$ зависит от параметра d' (8.17), который обобщает введенный ранее параметр d' .

Таким образом, основная идея использования отношения правдоподобия (см. главу 1) оказывается применимой для сигналов, являющихся функциями времени.

Для оптимального решения нужно выбирать соответствующий порог λ_0 или равнозначный ему порог g_0 . Так, например, при применении критерия Неймана — Пирсона значение вероятности α за-

дано и порог g_0 определяется на основании уравнения (8.16). Затем из уравнения (8.17) находится вероятность p (S/s).

Эта вероятность согласно (8.17) зависит также от d' . При байесовском критерии уровень g_0 выбирается на основании минимального среднего риска. В этом случае порог равен

$$\lambda_0 = \frac{q_1 c_\alpha}{q_2 c_\beta}.$$

С другой стороны, согласно (8.15)

$$\lambda_0 = \exp \frac{2g_0 - E_s}{N_0}, \quad (8.19)$$

откуда

$$g_0 = \frac{E_s}{2} + \frac{N_0}{2} \ln \lambda_0. \quad (8.20)$$

Можно использовать также другие критерии оптимальности, которые рассматривались в главе 3.

Рассмотренный вариант задачи обнаружения относился к известному полезному сигналу $s(t)$. Значения шума $n_k = n(t_k)$ считались независимыми случайными величинами. Такой шум $n(t)$ называется «белым». Это — наиболее неблагоприятный случай, так как в таком шумовом сигнале имеются все гармоники разложения функции в ряд Фурье и их интенсивность одинакова.

§ 2. Связь задачи обнаружения с задачей оценки параметров сигнала

Для решения задачи обнаружения система предварительно «должна определить» или, как принято говорить в математической статистике, «оценить» некоторые параметры сигнала. Эта связь между обнаружением и оценкой параметров важна для более глубокого понимания теории проверки гипотез. Поэтому ниже устанавливается связь между этими задачами, позволяющая применить эту теорию в других важных случаях.

Пусть в качестве параметра выбрана некоторая величина A , характеризующая полезный сигнал, но остающаяся не известной наблюдателю. Задача состоит в том, чтобы по наблюдаемой функции $x(t)$ найти величину A^* , которая была бы близка в некотором смысле к величине A .

В математической статистике эта процедура называется оценкой неизвестного параметра A . Получение наилучшей оценки A^* напоминает оптимальное байесовское решение о проверке гипотез (см. главу 3). Ошибкам в оценке A^* , как и в случае проверки гипотез, приписывается определенная цена. Цена для экспериментатора, что принята оценка A^* , когда истинное значение параметра равно A , является функцией с (A^*, A) Она

имеет минимум при $A^* = A$. Кроме функции потерь $c(A^*, A)$ обычно считается известным априорное распределение $\varphi(A)$ параметра A .

Таким образом, для получения наилучшей оценки наблюдатель может применить критерий минимума функции потерь

$$\bar{c} = \min_{A^*} c(A^*, A).$$

Однако часто получить оценку A^* из условия минимума $\bar{c}$ не удается, так как остаются неизвестными функции $c(\cdot)$ и $\varphi(\cdot)$.

Существуют различные способы, позволяющие уменьшить априорную информацию о распределении параметра A . В частности, Фишером и Крамером (см. [6]) предложены способы получения достаточных оценок, не требующие знания функций φ и c .

Наиболее простой способ получения оценок состоит в том, чтобы максимизировать апостериорную плотность вероятности по параметру A при наблюдениях $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$\max_A p(A/x_1, \dots, x_n) = p(A^*/x_1, \dots, x_n).$$

Оценка A^* , полученная из этого условия, называется наиболее правдоподобной, так как при этом достигается максимум вероятности $p(A^* \leq A \leq (A^* + dA^*)/x_1, x_2, \dots, x_n)$. Здесь мы замечаем, что способ получения оценок по максимальному правдоподобию совпадает с алгоритмом выбора решающего правила для принятия той или иной гипотезы (см. главу 1). Действительно, при выборе той или иной гипотезы используется правило максимальной апостериорной вероятности гипотезы H_i ($i = 1, 2$) при наблюдаемых в эксперименте величинах $x_1, \dots, x_n$.

При нахождении оценки из условия максимума правдоподобия используется то же самое условие, но вместо апостериорной плотности $p(H_i/x_1, \dots, x_n)$ берется апостериорная плотность $p(A/x_1, \dots, x_n)$ оцениваемого параметра.

Часто задача получения максимально правдоподобной оценки еще более упрощается. Вместо определения величины A^* из условия максимума апостериорной плотности вероятности $p(A^*/x_1, \dots, x_n)$ определяют A^* из условия максимума совместной плотности вероятности $p(A^*, x_1, x_2, \dots, x_n)$. Такая замена возможна, когда максимумы этих функций совпадают.

Оказывается, что в некоторых случаях получение оценки A^* параметра A позволяет также проверить гипотезу о наличии полезного сигнала.

Рассмотрим уже известную задачу обнаружения сигнала $s(t)$ по наблюдаемым значениям $x(t)$. Принимая за параметр A амплитуду полезного сигнала $As(t)$, наблюдаемого в аддитивной смеси с «белым» шумом, получим

$$x(t) = As(t) + n(t).$$

Пусть совместные распределения параметра A и значений $x_1, x_2, \dots, x_n$ при $t_k = k\Delta$ являются нормальными.

Тогда

$$p(A, x_1, \dots, x_n) = (2\pi D)^{-n/2} \exp - \frac{1}{2D} \sum_{k=1}^n (x_k - As_k)^2,$$

где $s_k = s(t_k)$; $D = D(x_k)$.

Для «белого» шума в полосе частот $(-w_c, w_c)$ и со значением спектральной плотности, равным $N_0/2$, $D = N_0 w_c$. Условие экстремума этой функции

$$\frac{\partial p}{\partial A} = 0$$

дает следующее выражение для оценки A^* параметра A :

$$A^* = \sum_1^n s_k x_k \Big/ \sum_1^n s_k^2 \quad (8.21)$$

или в непрерывном случае

$$A^* = \frac{\int_0^T s(t) x(t) dt}{\int_0^T s^2(t) dt}. \quad (8.22)$$

Таким образом, максимально правдоподобная оценка дается уравнением (8.21). Эта величина пропорциональна статистике G (см. (8.8)), использованной при проверке гипотезы о наличии сигнала $s(t)$. Оценка A^* является случайной величиной (так как случайной является $x(t)$). Поэтому нужно выяснить, насколько вероятно значение a^* , когда в действительности $A = 0$ (нуль-гипотеза). Для этого вычисляют вероятность

$$p(a^*) = p(|A^*| \geq a^*/A = 0) = p_0,$$

где a^* — значение оценки, полученное в опыте, и сравнивают эту вероятность с выбранным доверительным уровнем p_0 .

Обычно вычисляется доверительный интервал, в котором содержится величина A^* с вероятностью, равной Q_0 . Величина Q_0 выбирается близкой к единице. Можно задать вероятность противоположного события. Тогда $p_0 = 1 - Q_0$ и проверяется условие

$$p(a^*) \geq p_0. \quad (8.23)$$

Доверительный уровень p_0 показывает, насколько вероятны отклонения, большие a^* при условии $A = 0$, т. е. p_0 показывает, насколько могут быть частыми заведомо неправильные оценки. Таким образом, p_0 играет роль, аналогичную таковой вероятности ложной тревоги α .

Если

$$p(a^*) \geq p_0,$$

то принимается $A = 0$, если же $p(a^*) \leq p_0$, то принимается $A \neq 0$, следовательно, a^* действительно является оценкой A .

Если n_k — гауссовские независимые величины, то оценка A^* (см. (8.21)) при условии $A = 0$ (нуль-гипотеза) распределена нормально с параметрами $N\left(0, \sqrt{\frac{N_0}{2E_s}}\right)$, так как

$$D(A^*) = \frac{N_0}{2E_s}.$$

Отсюда следует, что вероятность $p(A^*)$ равна

$$p(a^*) = 2\text{erfc}\left(a^* \sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}\right).$$

Пусть X является решением уравнения

$$2\text{erfc } X = p_0,$$

тогда принимается, что $A = 0$ (с вероятностью Q_0), если

$$|a^*| \leq X \sqrt{\frac{N_0}{2E_s}}.$$

Так, если выбрать $p_0 = 0,01$, то $X = 2,58$.

Процедура выбора доверительного интервала для характеристики точности оценки малоубедительна, так как величина $Q_0(p_0)$ задается произвольно. Тем не менее она является одной из основных процедур математической статистики. Невозможность точных утверждений с вероятностью, равной единице, обусловлена асимптотическим характером теоретических распределений оценки (нормальный, экспоненциальный, χ^2 и т. д.). Плотность вероятности такого распределения $f(x)$ стремится к нулю при $x \rightarrow \infty$.

Условие (8.23) эквивалентно сравнению статистики G с некоторой величиной g_0 , являющейся порогом. Это условие определяет область значений G , соответствующую гипотезе H_1 (отсутствия сигнала).

Таким образом, построение оценки A^* приводит нас к алгоритму проверки гипотезы относительно наличия сигнала $s(t)$. Исходя из теории оценок, порог G_0 определяется так, что система будет обеспечивать уровень ложных тревог равным p_0 . Следовательно, система будет давать ложную тревогу в числе случаев p_0 от числа опытов, в которых сигнала нет.

§ 3. Разрешение сигналов

Максимально правдоподобные оценки не всегда эквивалентны оптимальным стратегиям обнаружения сигнала. Этого следует ожидать, так как в максимально правдоподобных оценках используется значительно меньше данных по сравнению с количеством

данных, необходимых, например, для определения среднего байесовского риска. По-видимому, можно ожидать, что в случае оптимальных байесовских оценок процедура построения доверительных интервалов оценок окажется эквивалентной байесовской стратегии. Однако в том случае, когда такая эквивалентность имеется, можно ее использовать для решения новых задач.

Рассмотрим, например, следующую задачу. Пусть имеется несколько сигналов. Не нарушая общности, можно ограничиться двумя сигналами $As(t)$ и $Bq(t)$ (далее сигнал A и сигнал B). Функции s и q заданы, а параметры A и B не известны наблюдателю. По входному сигналу $x(t)$ ($0 \leq t \leq T$) наблюдатель должен принять одну из четырех гипотез: H_0 — «нет ни сигнала A , ни сигнала B »; H_1 — «имеется один сигнал A »; H_2 — «имеется один сигнал B »; H_3 — «присутствуют сигналы A и B ».

Такая задача называется задачей «разрешения» сигналов. Если бы не было шума, наблюдатель мог бы достоверно разделить сигналы A и B . Разделение можно было произвести, сравнивая между собой величины A^* и B^* :

$$\begin{aligned} A^* &= (1 - \lambda^2)^{-1} \int_0^T [s(t) - \lambda q(t)] x(t) dt, \\ B^* &= (1 - \lambda^2)^{-1} \int_0^T [q(t) - \lambda s(t)] x(t) dt, \end{aligned} \quad (8.24)$$

где

$$\begin{aligned} \lambda &= \int_0^T s(t) q(t) dt; \\ \int_0^T s^2(t) dt &= \int_0^T q^2(t) dt = 1. \end{aligned} \quad (8.25)$$

Действительно, при отсутствии шума наблюдаемый сигнал равен $x(t) = As(t) + Bq(t)$.

Тогда, если $B = 0$, в (8.24) $A^* = 1$ и $B^* = 0$. Если же $A = 0$, то согласно той же формуле (8.24) $A^* = 0$ и $B^* = 1$.

Для различения сигналов A и B можно использовать также какие-либо другие величины, являющиеся функциями $s(t)$ и $q(t)$.

Таким образом, если какая-либо из величин A^* или B^* равна нулю, то соответствующий сигнал отсутствует. Если сигналы A и B смешаны с шумом, то величины A^* и B^* из (8.24) могут быть отличны от нуля, даже если сигналы A и B равны нулю.

Следовательно, наблюдатель для решения должен принять некоторую стратегию, использующую величины A^* , B^* или какие-либо другие величины, зависящие от наблюдаемого сигнала $x(t)$. Эта стратегия должна дать возможность сделать выбор из

четырёх гипотез — H_0, H_1, H_2, H_3 , обеспечивая некоторый средний успех.

Для решения задачи можно использовать оптимальную байесовскую стратегию. Именно можно использовать стратегию минимума условного риска (см. главу 3). Эта стратегия непосредственно переносится со случая двух гипотез на случай четырех гипотез (H_0, H_1, H_2, H_3).

Однако проще для решения этой задачи использовать максимально правдоподобные оценки. При этом, разумеется, надо иметь уверенность, что максимально правдоподобные оценки приведут к тем же результатам, что и теория статистических решений. Для этой задачи такая уверенность действительно имеется.

Так же как и раньше, предположим, что $n(t)$ — «белый» гауссовский шум (это утверждение эквивалентно независимости и нормальности величин n_k).

Определим оценки A^* и B^* величин A и B методом максимального правдоподобия. При наличии шума наблюдается сигнал

$$x(t) = As(t) + Bq(t) + n(t).$$

Максимально правдоподобные оценки A^* и B^* минимизируют средний квадрат ошибки

$$L = \int_0^T [x(t) - A^*s(t) - B^*q(t)]^2 dt.$$

Непосредственным вычислением нетрудно убедиться, что величины A^* и B^* минимизирующие L , как раз определяются уравнением (8.24).

Когда сигнал A отсутствует, имеется большая вероятность того, что оценка A^* его амплитуды будет малой величиной. Следовательно, можно выбрать доверительные пределы для A^* и B^* так, чтобы попадание оценок A^*, B^* в эти пределы с вероятностью, близкой к единице, было бы равносильно отсутствию сигналов A и B . Таким образом, построение доверительных областей для A^* и B^* приводит к разделению плоскости (A^*, B^*) на четыре непересекающиеся области R_0, R_1, R_2, R_3 . Гипотеза R_k принимается, если $x \in R_k$.

Задача упрощается благодаря следующему рассуждению. Принятие решения о сигнале A не зависит от оценки B^* , так как эта оценка не зависит от величины A . Следовательно, выбор между четырьмя гипотезами сводится к двум независимым выборам относительно сигнала A и сигнала B .

Выбор достигается сравнением A^* и B^* с некоторым критическим уровнем c_0 . Здесь используется одно и то же значение c_0 для двух сигналов, так как в обоих случаях сигналы A и B смешаны с шумом $n(t)$, и выполняется условие (8.25).

Значение c_0 зависит от цены ошибки π , следовательно, от вероятности ложной тревоги p_0 . Значение c_0 определяется условием

$$p(A^* \geq c_0) = p_0,$$

где справа вероятность того, что оценка A^* попадет в область R_1 или R_3 , когда истинная амплитуда A равна нулю.

Среднее значение A^* при условии, что имеется сигнал A , равно $M(A^*) = A$ и равно нулю, когда сигнала A нет. Аналогично среднее значение B^* при условии, что имеется сигнал B , равно $M(B^*) = B$. Такие оценки A^* и B^* называются несмещенными.

Дисперсии оценок одинаковы и равны

$$D(A^*) = D(B^*) = \mu/(1 - \lambda^2),$$

где $\mu = N_0/2$ — спектральная плотность $n(t)$. Вычисление дисперсий проводится совершенно аналогично случаю оценки одного параметра A .

Коэффициент корреляции величин A^* и B^* равен

$$r_{AB} = M[(A^* - A)(B^* - B)] = \mu\lambda/(1 - \lambda^2).$$

При условии $A = 0$ плотность вероятности оценки A^* является нормальной и имеет вид

$$\bar{p}(A^*) = \sqrt{\frac{1 - \lambda^2}{2\pi}} \exp\left[-\frac{1 - \lambda^2}{2\mu}(A^*)^2\right].$$

Следовательно, вероятность ложной тревоги равна

$$p(A^*) = p(|A^*| > c_0/A = 0) = 2 \operatorname{erfc}\left(c_0 \sqrt{\frac{1 - \lambda^2}{\mu}}\right).$$

Уравнение

$$p(A^*) = p_0$$

определяет совместно с предыдущим уравнением величину критического уровня c_0 .

Вероятность обнаружения $p(S/s)$ сигнала A также не зависит от того, присутствует или нет сигнал B . Она определяется формулой

$$P(S/s) = P(|A^*| > c_0/A \neq 0) = 1 - \operatorname{erfc} y_1 - \operatorname{erfc} y_2,$$

где

$$y_1 = A\sqrt{(1 - \lambda^2)/\mu} + x; \quad y_2 = A\sqrt{(1 - \lambda^2)/\mu} - x; \\ x = c_0\sqrt{(1 - \lambda^2)/\mu}.$$

Для заданной величины ложной тревоги α величина $p(S/s)$ есть возрастающая функция величины $A^2 \frac{1 - \lambda^2}{\mu}$. Чем ближе друг к другу сигналы A и B (чем меньше различаются функции $s(t)$ и $q(t)$), тем величина λ ближе к единице. При этом для достижения заданной вероятности обнаружения каждого сигнала требуется большее значение параметра $\sqrt{A^2/\mu}$.

Интересно рассмотреть геометрическую интерпретацию оценки параметров A и B методом наименьших квадратов. Эта интерпретация хорошо известна.

Пусть сигнал $x(t)$ измеряется в моменты времени $t_1, \dots, t_n$ и система использует вектор $\mathbf{x} (x_1, \dots, x_n)$, где $x_n = x(t_n)$. Следовательно, вместо непрерывных сигналов $s(t)$, $q(t)$ и $n(t)$ будут использоваться векторы $\mathbf{s}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{n}$, которые получаются аналогично вектору $\mathbf{x}$.

Определим скалярное произведение двух векторов в n -мерном пространстве:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{k=1}^n u_k v_k.$$

Величина

$$\|\mathbf{u}\|^2 = (\mathbf{u}, \mathbf{u})$$

есть квадрат нормы вектора $\mathbf{u}$ в пространстве R_n . Аналогично непрерывному случаю можно считать, что

$$\|\mathbf{s}\|^2 = \|\mathbf{q}\|^2 = 1.$$

При сделанных предположениях полезный сигнал представляется вектором

$$\mathbf{\Gamma} = A\mathbf{s} + B\mathbf{q},$$

где A и B , как и раньше, — неизвестные параметры. Выражение для $\mathbf{\Gamma}$ показывает, что все возможные сигналы лежат в плоскости, проходящей через векторы $\mathbf{s}$ и $\mathbf{q}$.

Как и раньше, оценки, вычисленные по методу максимального правдоподобия в предположении нормальности шума $n(t)$, минимизируют квадрат ошибки

$$L = \|\mathbf{x} - A^*\mathbf{s} - B^*\mathbf{q}\|^2.$$

Прямое вычисление дает

$$A^* = \frac{(\mathbf{x}, (\mathbf{s} - \lambda\mathbf{q}))}{1 - \lambda^2}, \quad B^* = \frac{(\mathbf{x}, (\mathbf{q} - \lambda\mathbf{s}))}{1 - \lambda^2},$$

где $\lambda = (\mathbf{s}, \mathbf{q})$.

Эти выражения почти аналогичны оценкам (8.24) для непрерывного случая. Различие состоит лишь в том, что скалярные произведения в гильбертовом пространстве в уравнениях (8.24) заменены скалярными произведениями векторов в пространстве R_n . Известно [6], что минимум среднего квадрата ошибки L достигается, когда оценка $\mathbf{\Gamma}^*$ полезного сигнала имеет вид

$$\mathbf{\Gamma}^* = A^*\mathbf{s} + B^*\mathbf{q}$$

и является проекцией вектора $\mathbf{x}$ на плоскость векторов $\mathbf{s}$ и $\mathbf{q}$. Оценки A^* и B^* есть проекции вектора $\mathbf{x}^*$ на векторы $\mathbf{s} - \lambda\mathbf{q}$ и $\mathbf{q} - \lambda\mathbf{s}$. Последние векторы перпендикулярны векторам $\mathbf{q}$ и $\mathbf{s}$ и образуют систему взаимных векторов по отношению к $\mathbf{q}$ и $\mathbf{s}$. В плоскости проекций Π (в плоскости, проходящей через векторы

s и q) области решений ограничены прямыми линиями, перпендикулярными взаимным векторам i , следовательно, параллельным векторам s и q .

Действительно, при сделанных предположениях относительно шума разделяющая поверхность есть плоскость, а прямые линии являются ее следами в плоскости проекций Π .

Геометрическая интерпретация построения оценок A^* и B^* показана на рис. 8.3. На рис. 8.3 вектор Γ^* лежит в области R_1 , что соответствует решению о наличии сигнала A и об отсутствии сигнала B . Значение оценки B^* в этом случае настолько мало, что вектор Γ^* близок вектору s . При этих условиях принимается, что оценка B^* зависит только от одного шума.

По определению скалярного произведения векторов

$$(s, q) = |s| |q| \cos \beta,$$

где β — угол между векторами s и q . Следовательно, параметр λ равен $\cos \beta$, так как $|s| = |q| = 1$ и $(s, q) = \lambda$. Чем меньше угол β , тем труднее разрешить сигнал.

Наконец интересно остановиться на случае задачи разрешения m сигналов: $s_1(t), s_2(t), \dots, s_m(t)$. Метод максимального правдоподобия позволяет получить решение этой задачи столь же просто, как и в случае двух сигналов A и B [6]. Входной сигнал, используемый наблюдателем для принятия решения, имеет в этом случае вид

$$x(t) = \sum_{k=1}^m A_k s_k + n(t),$$

где амплитуды $A_1, A_2, \dots, A_m$ не известны наблюдателю.

Максимально правдоподобные оценки $A_1^*, A_2^*, \dots, A_m^*$ амплитуд определяются из условия минимума квадрата ошибки

$$L = \int \left[x(t) - \sum_{k=1}^m A_k^* s_k(t) \right]^2 dt,$$

что приводит к системе линейных уравнений

$$AA^* = C,$$

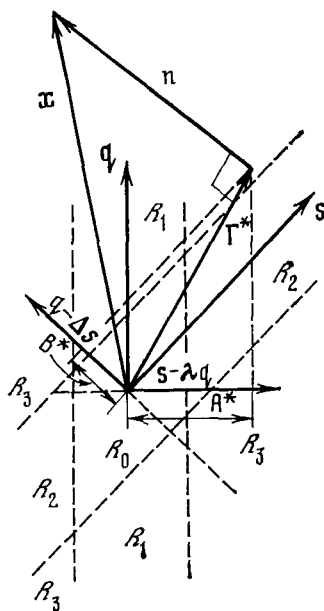


Рис. 8.3. Геометрическая интерпретация оптимального решающего правила

где $\Lambda = \|\lambda_{jk}\|$ — матрица $m \times m$; $\mathbf{A}^*$ — вектор $m \times 1$; $\mathbf{C}$ — вектор $m \times 1$;

$$\lambda_{jk} = \int_0^T s_j(t) s_k(t) dt; \quad c_j = \int_0^T s_j(t) x(t) dt.$$

Решение уравнений дает оценки $A_1^*, A_2^*, \dots, A_m^*$. Затем каждая оценка проверяется сравнением с критическим уровнем G_k , который определяется по доверительной вероятности. Если $A_k^* > G_k$, то считается, что сигнал A_k присутствует.

Для принятия решения о наличии сигнала можно пользоваться также проверкой нуль-гипотезы (как это уже делалось для одного и двух сигналов). При определении вероятности ложной тревоги дисперсии оценок вычисляются в соответствии с уравнением [6]

$$D(A_k^*) = \mu \gamma_{kk},$$

где γ_{kk} — элементы обратной матрицы Λ^{-1} ; $\mu = N_0/2$.

Геометрическая интерпретация на рис. 8.3 может быть распространена на случай m сигналов. Для этого следует рассмотреть векторы $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_m$ и наблюдаемый вектор

$$\mathbf{x} = \sum_1^m A_k \mathbf{s}_k + \mathbf{n}$$

в пространстве R_m .

Векторы определены так же, как в случае двух сигналов. Скалярное произведение и норма в R_n определяются уже известным образом.

Векторы $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_m$ образуют базис пространства проекции Π_m . Наилучшая (в смысле минимума среднего квадрата ошибки) оценка $\mathbf{\Gamma}_m^*$ полезного сигнала имеет вид

$$\mathbf{\Gamma}_m^* = \sum_1^m A_k^* \mathbf{s}_k.$$

Оценки A_k^* равны проекциям наблюдаемого вектора $\mathbf{x}$ на векторы $\mathbf{z}_k$ ($k = 1, 2, \dots, m$), образующие ортонормальный базис пространства Π_m .

Пространство Π_m разбивается на 2^m -областей, позволяющих принимать решения относительно сигналов $A_1, A_2, \dots, A_m$. Область для принятия решения «сигнал A_1 отсутствует» ($A_1 = 0$) ограничена парой плоскостей, параллельных плоскости, проходящей через векторы $\mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_m$.

§ 4. Точная теория

Теория обнаружения, которую мы только что рассмотрели, очень поучительна с точки зрения того, как «маленькие неточности в посылах» приводят к большим последствиям. В частности, мы

надеемся, что наша теория обнаружения сигналов вида

$$\Gamma(t) = \sum_1^m A_k s_k(t)$$

в гауссовском «белом» шуме $n(t)$ верна, по крайней мере в первом приближении.

Это действительно так. Однако результаты точной теории, будучи более общими, достаточно сильно отличаются от приближенных вычислений. Поэтому полезно рассмотреть эти результаты, хотя их изложение здесь будет по необходимости фрагментарным.

Приближение, которое использовалось для получения основных результатов, состояло в том, что функция $x(t)$ заменялась вектором $x(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Затем над векторами проделывались все необходимые вычисления и в окончательном результате делался переход к пределу при $n \rightarrow \infty$. В частности, так были получены выражения для статистик (8.8) (8.24) и затем плотности вероятности статистики G (8.15). При этом предполагалось, что при любом k случайные величины x_k ($k = 1, 2, \dots, n$) остаются независимыми и отношение правдоподобия имеет вид (8.4).

В действительности это не так.

Если имеется гауссовский процесс $n(t)$ со спектральной плотностью

$$\Phi(\omega) = \begin{cases} \frac{N_0}{2} & \omega \in (-\omega_c, \omega_c), \\ 0 & \omega \notin (-\omega_c, \omega_c), \end{cases} \quad (8.25)$$

то корреляционная функция имеет вид (Приложение I)

$$k(\tau) = N_0 \sin \omega_c \tau / 2\pi \tau,$$

где $\omega_c = 2\pi \omega_c$.

Следовательно, некоррелированными (и вследствие нормальности независимыми) являются значения n_k , расположенные через интервалы $\Delta t_k = \pi k / \omega$ ($k = 1, 2, \dots$). Отсюда следует, что переход к пределу $n \rightarrow \infty$ нельзя осуществить так, чтобы величины x_k оставались при этом независимыми, и отношение правдоподобия $\lambda(x)$ нельзя представить в виде (8.4).

Таким образом, все результаты теории, относящиеся к непрерывным величинам, находятся под сомнением.

Для того чтобы получить точный результат, требуется более сложная техника по сравнению с той, которая использовалась нами. Ниже мы приведем, без подробных пояснений, фрагменты этой общей теории и ее основные результаты. Все рассуждения относятся к задаче выделения полезного сигнала $s(t)$ из сигнала $x(t)$ вида (8.1).

Новая техника основана на возможности представить случайную функцию $n(t)$ обобщенным рядом Фурье вида

$$n(t) = \sum_1^{\infty} v_k \varphi_k(t). \quad (8.26)$$

Легко показать, что ортонормальные функции $\varphi_k(t)$ можно выбрать так, чтобы случайные величины v_k были бы некоррелированными, а для нормальной $n(t)$ — и независимыми. Этот выбор φ_k можно осуществить не единственным способом [6]. В частности, $\varphi_k(t)$ могут быть собственными функциями интегрального уравнения

$$\lambda_k \varphi_k(t) = \int k(t - \tau) \varphi_k(\tau) d\tau,$$

где $k(\cdot)$ — корреляционная функция процесса $n(t)$; λ_k — собственные значения.

Теперь идея состоит в том, чтобы для вычисления отношения правдоподобия использовать вектор $v(v_1, v_2, \dots, v_n)$ (а не вектор $x(x_1, x_2, \dots, x_n)$ значений наблюдаемой функции $x(t)$). Такой переход действительно можно сделать, так как согласно уравнению (8.26) случайный процесс оказывается эквивалентным счетному числу случайных величин $v_1, v_2, \dots, v_n$.

Таким образом, вместо условных плотностей $f_1(x), f_2(x)$ можно использовать нормальные плотности

$$f_1(v) = \prod_{k=1}^n (2\pi\lambda_k)^{-1/2} \exp\left(-\sum_{k=1}^n \frac{v_k^2}{2\lambda_k}\right),$$

$$f_2(v) = \prod_{k=1}^n (2\pi\lambda_k)^{-1/2} \exp\left(-\sum_{k=1}^n \frac{(v_k - s_k)^2}{2\lambda_k}\right).$$

При этом легко показать, что собственные числа λ_k интегрального уравнения равны дисперсиям величин v_k

$$\lambda_k = D(v_k).$$

Отношение правдоподобия тогда примет вид

$$\lambda(v) = \exp\left(\sum_{k=1}^n \frac{2s_k v_k - s_k^2}{2\lambda_k}\right), \quad (8.27a)$$

где

$$s_k = \int_0^T \varphi_k(t) s(t) dt, \quad v_k = \int_0^T \varphi_k(t) x(t) dt. \quad (8.27b)$$

Отношение правдоподобия $\lambda(v)$ только внешне напоминает ранее вычисленное отношение правдоподобия $\lambda(x)$ [см. (8.4)]: здесь значения s_k, v_k отличны от s_h, v_h в (8.4) и в знаменателе вместо постоянной величины D стоят переменные λ_k .

Кроме того, не следует забывать, что уравнение (8.27а) имеет место для любых гауссовских процессов $n(t)$. В частности, для таких процессов значения $x_k \approx x(t_k)$ могут быть зависимыми случайными величинами с неравными дисперсиями.

Сравнение $\lambda(v)$ с порогом λ_0 дает следующее решающее правило:

$$G = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s_k v_k}{\lambda_k} < \ln \lambda_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s_k^2}{2\lambda_k}. \quad (8.28)$$

Следовательно, в n -мерном пространстве с координатами $v_1, v_2, \dots, v_n$ разделяющей поверхностью является также гиперплоскость, определяемая уравнением

$$\sum_{k=1}^n \frac{s_k v_k}{\lambda_k} = \text{const.}$$

Этот точный результат отличен от результата, полученного в (8.7), в котором гиперплоскость строится в пространстве значений $x_1, x_2, \dots, x_n$ измеряемой величины.

Так как величины v_k в уравнении (8.27б) линейно связаны с $x(t)$, то переход в (8.27б) от интегралов к суммам показывает, что разделяющей гиперплоскости в пространстве наблюдений $x_1, x_2, \dots, x_n$ соответствует гиперплоскость в пространстве $v_1, v_2, \dots, v_n$ и обратно.

Таким образом, утверждение приближенной теории о том, что разделяющей поверхностью является гиперплоскость, верно для вырожденных процессов $n(t)$ и приближенно в более общем случае.

Для бесконечной суммы необходимо использовать статистику

$$G = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s_k v_k}{\lambda_k}.$$

В этом случае разделяющей поверхностью является гиперплоскость в бесконечномерном евклидовом пространстве.

Статистика G может быть представлена также в виде

$$G = \int_0^T q(t) x(t) dt,$$

где функция $q(t)$ есть решение интегрального уравнения первого рода

$$s(t) = \int_0^T k(t - \tau) q(\tau) d\tau.$$

В этом легко убедиться, раскладывая в обобщенный ряд Фурье функции $q(t)$, $s(t)$ и вычисляя интеграл, определяющий G .

Статистика G , как линейная комбинация нормальных величин, распределена нормально. Поэтому функции плотности $p_1(g)$

и $p_2(g)$ имеют вид

$$p_1(g) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{g^2}{2\sigma^2}\right),$$

$$p_2(g) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{(g-\sigma)^2}{2\sigma^2}\right),$$

где параметр σ^2 равен дисперсии

$$\sigma^2 = \iint q(t_1) q(t_2) M[n(t_1) n(t_2)] dt_1 dt_2$$

или

$$\sigma^2 = \iint q(t_1) q(t_2) k(t_1 - t_2) dt_1 dt_2 = \int q(t) s(t) dt.$$

Для вероятностей обнаружения и ложной тревоги на основании (8.9), (8.10) имеют место выражения

$$p(S/s) = \operatorname{erfc}(x - \sigma), \quad p(S/n) = \operatorname{erfc} x,$$

где $x = g_0/\sigma$.

Заканчивая наше фрагментарное рассмотрение точной теории, можно сделать следующие выводы:

1. Приближенная теория для случая «белого» гауссовского шума приводит к качественно верным заключениям о разделяющей поверхности в пространстве $x_1, x_2, \dots, x_n$. Теория очень проста и может быть получена путем элементарных рассуждений.

2. Точная теория подтверждает выводы приближенной теории о разделяющей поверхности в пространстве $x_1, x_2, \dots, x_n$. Она позволяет распространить полученные результаты на произвольные случайные функции $n(t)$ второго порядка (зависимые неравноточные измерения). Для этого случая разделяющей поверхностью также является гиперплоскость, но уже в пространстве параметров $v_1, v_2, \dots, v_n$ (см. (8.26)).

§ 5. Детектор огибающей

Полезно теперь применить общую теорию для выделения из шума гармонического сигнала, определенного с точностью до фазы. Сигнал $s(t)$ в этом случае имеет вид

$$s(t) = A \cos(2\pi f_l t - \theta), \quad (8.29)$$

где A — амплитуда колебания; f_l — частота; θ — фаза.

Фазу можно считать постоянной. Если значение фазы неизвестно, то это равносильно предположению о том, что фаза является случайной величиной.

Особенностью восприятия звукового сигнала вида (8.29) является нечувствительность слуха к фазе θ . Для того чтобы это понять, полезно вначале рассмотреть восприятие звукового

сигнала общего вида

$$s(t) = A(t) \cos 2\pi f_l t,$$

где $A(t)$ — амплитуда, изменяющаяся со временем (модулирующая функция). Относительно $A(t)$ предполагается, что ее изменение на периоде $T_l = 1/f_l$ незначительно.

В простейшем случае модулирующая функция может быть гармонической

$$A(t) = 2A \cos 2\pi f t.$$

Такая амплитуда получается при сложении двух гармонических колебаний различных частот. Действительно,

$$y(t) = A \cos 2\pi f_1 t + A \cos 2\pi f_2 t = 2A \cos 2\pi f t \cos 2\pi f_l t,$$

где принято $f_l = (f_1 + f_2)/2$ и $f = (f_1 - f_2)/2$; f_l — несущая частота (обычно $f_l \gg f$); f — модулирующая частота. Модулированное колебание происходит со средней несущей частотой f_l . При этом происходит медленное колебание амплитуды с частотой $f \ll f_l$.

Если $y(t)$ — звуковой сигнал, создаваемый двумя камертонами с частотами f_1 и f_2 , и f_1 и f_2 отличаются более чем на 6%, то сигналы с частотами f_1 , f_2 воспринимаются как разные колебания, т. е. они будут слышны как две разные ноты, мало отличающиеся по высоте. Так, например, если $f_1 = 1,25f_2$, то две ноты слышны с интервалом «большая терция». Если $f_1 = 1,06f_2$, то f_1 воспринимается на полтона выше, чем f_2 . Однако если частоты f_1 и f_2 различаются менее чем на 6%, то сигналы воспринимаются как одна нота, а не как «аккорд». Так как амплитуда $A(t)$ колеблется с частотой f , то громкость звука меняется и дважды за период $T = 1/f$ пропадает совсем. Такое колебание $y(t)$, являющееся суммой двух колебаний с близкими частотами, называется *биением*. В промежутках между паузами ухо воспринимает колебание среднего тона частотой f_l .

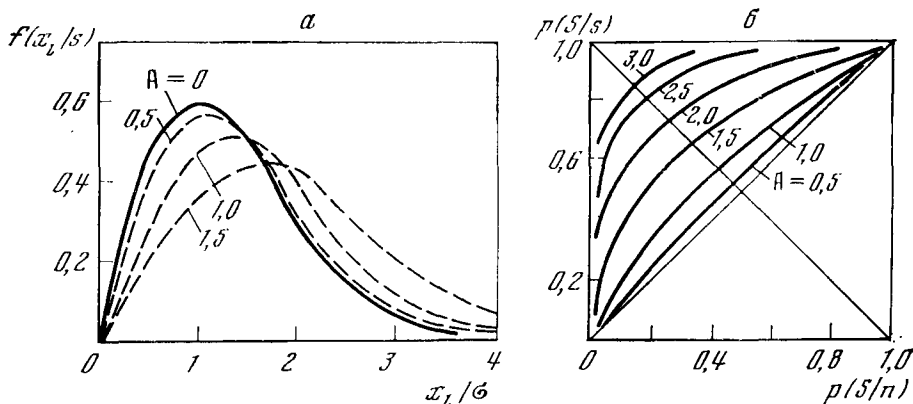
Амплитуда модуляции $A(t)$ меняет знак на интервале, равном периоду $T = 1/f$. Однако ухо не различает изменения знака. Оно различает лишь изменение величины амплитуды, что соответствует ощущению разной громкости. Поэтому иногда говорят, что ухо является квадратичным детектором. Так как $A^2(t)$ имеет два максимума на каждом периоде, то частота повторения цикла «громко — тихо» в 2 раза выше частоты модуляции. Эта частота называется *частотой биений*.

Из сказанного становится ясным, что при восприятии сигнала (8.29) ухо будет воспринимать величину A как громкость чистого тона. Полезная информация содержится в амплитуде $A(t)$ модулирующего сигнала, который иногда называется *огibaющей*. Для колебания вида

$$a \cos 2\pi f_l t + b \sin 2\pi f_l t = c \sin (2\pi f_l t + \theta), \quad \operatorname{tg} \theta = a/b,$$

огibaющая c равна $c = (a^2 + b^2)^{1/2}$.

При выделении полезной информации из более сложного сигнала также следует выделять огибающую. Таким является сигнал вида (8.29), у которого фаза распределена случайно. Если использовать детектор огибающей в этом случае, то выделенная им амплитуда $A(t)$ не будет зависеть от случайной фазы θ . Следовательно, детектор огибающей является идеальным фильтром для выделения сигнала из шума. Более сложно выделить сигнал вида (8.29) из смеси $x(t) = s(t) + n(t)$. Если выделить огибающую



Р и с. 8.4. Апостериорные плотности в РХ детектора огибающей

такого сигнала, то она будет зависеть от шума $n(t)$. Действительно, гармоника на частоте f_l сигнала $x(t)$ имеет вид

$$(A \cos \theta + a_l) \cos 2\pi f_l t + (A \sin \theta + b_l) \sin 2\pi f_l t.$$

В этом выражении $a_l \cos 2\pi f_l t + b_l \sin 2\pi f_l t = x_l \cos(2\pi f_l t - \gamma)$ является гармоникой шума на частоте f_l .

В этом случае для обнаружения огибающей сигнала (8.29) нужно использовать отношение правдоподобия огибающей $\lambda(x_l)$. В Приложении V показано, что отношение правдоподобия огибающей имеет вид

$$\lambda(x_l) = I_0 \left(\frac{x_l A}{DT} \right) \exp \left(-\frac{E_s}{DT} \right), \quad (8.30)$$

где $I_0(\cdot)$ — функция Бесселя нулевого порядка; $E_s = A^2 T/2$ — энергия сигнала $s(t)$; D — дисперсия шума.

Пользуясь отношением правдоподобия, можно наилучшим образом выделить информацию, содержащуюся в огибающей сигнала вида (8.29).

При некоторых предположениях (Приложение V) апостериорные плотности вероятности $f(x_l/n)$ и $f(x_l/s)$ огибающей

имеют вид

$$f(x_l/n) = \frac{x_l}{\sigma^2} \exp - \frac{1}{2} \left(\frac{x_l}{\sigma} \right)^2, \quad (8.31)$$

$$f(x/s) = \frac{x_l T}{N_0} I_0 \left(\frac{x_l A T}{N_0} \right) \exp - \left(\frac{A^2 + x_l^2}{2} \right) \frac{T}{N_0},$$

где $N_0/2$ — спектральная плотность шума $n(t)$.

Плотность $f(x_l/n)$ связана с распределением Релея. На рис. 8.4, а изображены апостериорные плотности огибающей $f(x_l/s)$, на рис. 8.4, б — РХ детектора огибающей для различных значений параметра A . Можно также показать, что плотность вероятности $f(x_l/s)$, когда $x_l \approx A$ (т. е. когда шум $n(t)$ относительно мал), близка к нормальной (Приложение V).

ТЕОРИЯ М-ФУНКЦИИ И АНАЛИЗ ВНУТРЕННИХ ШУМОВ ДЕТЕКТОРА

§ 1. Различные схемы опытов для получения рабочих характеристик и М-функций

Теория, излагаемая в этой главе, позволяет определить М-функции с точностью до параметров, которые затем оцениваются экспериментально.

Следует рассмотреть различные схемы опытов. Две схемы относятся к обнаружению известного сигнала $s(t)$ в одном интервале наблюдения.

В первой схеме наблюдается сигнал

$$x(t) = s(t) + n(t),$$

где $n(t)$ — шум. От испытуемого (или детектора обнаружения) требуется проверить двухальтернативную гипотезу

$$x(t) = s(t) + n(t) : H_2, \quad x(t) = n(t) : H_1.$$

Результаты опыта, проведенного по первой схеме, приведены на рис. 9.1. В первой схеме сигнал $s(t)$ сравним с абсолютным порогом детектора, поэтому эту схему естественно называть *абсолютной*.

Во второй схеме наблюдается сигнал

$$x(t) = c(t) + s(t) + n(t).$$

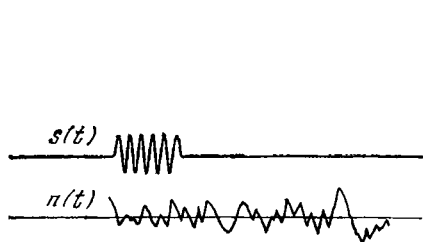
где $c(t)$ — известный (неслучайный) сигнал. От испытуемого требуется проверить гипотезу

$$x(t) = c(t) + s(t) + n(t) : H_2, \quad x(t) = c(t) + n(t) : H_1.$$

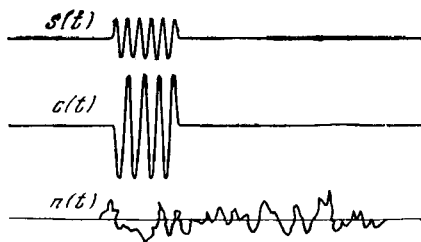
Результаты опыта, проведенного по второй схеме, изображены на рис. 9.2. В этой схеме полезный сигнал $s(t)$ является приращением сигнала $c(t)$ и сравнивается с дифференциальным порогом детектора. При этом интенсивность сигнала s может значительно превышать абсолютный порог детектора. По этой причине вторую схему естественно называть *дифференциальной*.

Эксперименты, проведенные по третьей и четвертой схемам, — это распространение двух первых схем на случай двойного интервала наблюдения. Таким образом, эксперименты по абсолютной и дифференциальной схемам здесь проводятся с двумя интервалами наблюдения (с принудительным выбором).

Следует заметить, что первые две схемы опытов существенно различаются. Различие же между двумя первыми и двумя следующими схемами не так велико. Как показано в пятой главе, эксперименты по двухальтернативной схеме с двумя интервалами



Р и с. 9.1. Абсолютная схема опыта



Р и с. 9.2. Дифференциальная схема опыта

наблюдения в известном смысле эквивалентны двухальтернативной схеме с одним интервалом. Поэтому прежде всего следует рассмотреть теорию для первых двух схем опытов.

§ 2. Построение рабочих характеристик и М-функций для первой схемы опытов

В этом случае, как показано в главе 8, для принятия решения о присутствии сигнала $s(t)$ известной формы можно использовать статистику

$$G = \int_0^T x(t) s(t) dt.$$

Для того чтобы определить апостериорные плотности случайной величины G , предположим, что шум $n(t)$ является гауссовским случайным процессом. Тогда случайная величина G как функционал от $n(t)$ распределена нормально и остается лишь определить ее два момента — математическое ожидание и дисперсию.

Математическое ожидание при гипотезе H_1 равно

$$M[G_n] = M\left[\int_0^T n(t) s(t) dt\right] = \int_0^T s(t) M[n(t)] dt = 0.$$

Математическое ожидание при гипотезе H_2 равно

$$M[G_s] = M\left[\int_0^T [n(t) + s(t)] s(t) dt\right] = \int_0^T s^2(t) dt = E_s,$$

где E_s — энергия полезного сигнала $s(t)$.

Дисперсия статистики G при обеих гипотезах одинакова и равна

$$\begin{aligned} D &= D(G) = M\left[\left|\int_0^T [s(t) + n(t)] s(t) dt - E_s\right|^2\right] = \\ &= M\left[\left|\int_0^T s(t) n(t) dt\right|^2\right] = \iint_0^T s(t_1) s(t_2) k(t_1, t_2) dt_1 dt_2, \end{aligned}$$

где $k(t_1, t_2)$ — корреляционная функция $n(t)$.

Если предположить, что $n(t)$ есть белый шум, то

$$k(t_1, t_2) = \frac{N_0}{2} \delta(t_1 - t_2),$$

где $\delta(t_1 - t_2)$ — дельта-функция Дирака; $N_0/2$ — спектральная плотность шума.

Тогда дисперсия будет равна

$$D = \frac{N_0}{2} \iint s(t_1) s(t_2) \delta(t_1 - t_2) dt_1 dt_2 = N_0 E_s / 2.$$

Таким образом, статистика G при гипотезах H_1 и H_2 распределена нормально с параметрами для $H_1 N(0, \sigma)$ и для $H_2 N(E_s, \sigma)$, где $\sigma = \sqrt{D}$ — среднеквадратичное значение случайной величины G . Апостериорные плотности случайной величины G при гипотезах H_1 и H_2 есть гауссовские плотности и, следовательно, имеют вид

$$f(g/n) = (2\pi D)^{-1/2} \exp\left(-\frac{g^2}{2D}\right), \quad (9.1)$$

$$f(g/s) = (2\pi D)^{-1/2} \exp\left[-\frac{(g - E_s)^2}{2D}\right].$$

Вероятности попадания $p(S/s)$ и ложной тревоги $p(S/n)$ теперь определяются интегрированием (9.1):

$$p(S/s) = \int_{g_0}^{\infty} f(g/s) dg = \operatorname{erfc}(x - d'), \quad (9.2)$$

$$p(S/n) = \int_{g_0}^{\infty} f(g/n) dg = \operatorname{erfc} x,$$

где

$$x = g_0/\sigma, \quad d' = E_s/\sigma = \sqrt{2E_s/N_0}.$$

Функция erfc определяется как

$$\operatorname{erfc} x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2/2} dt = \Phi(-x). \quad (9.3)$$

Функция Лапласа в (9.3) $\Phi(x)$ определена формулой¹

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt, \quad (9.4)$$

¹ Используемую здесь функцию $\operatorname{erfc} x$ не следует путать с функцией

$$\operatorname{erfc} x = \frac{2}{\pi} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

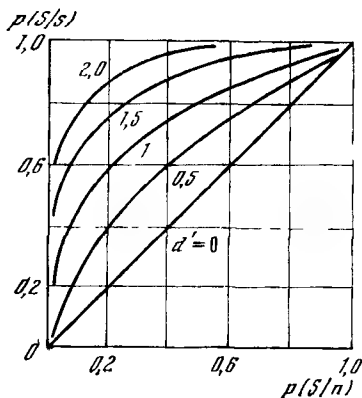
В (9.2) g_0 есть порог, при котором принимается решение о гипотезах H_1, H_2 .

Параметрические уравнения

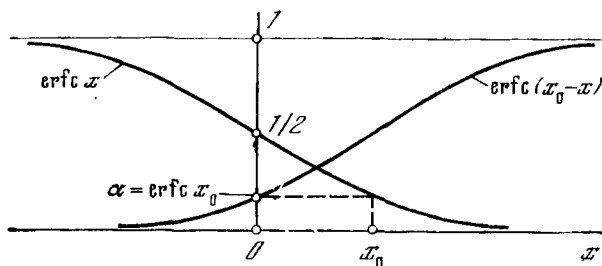
$$p(S/s) = \operatorname{erfc}(x - d'), \quad p(S/n) = \operatorname{erfc} x \quad (9.5)$$

определяют РХ процесса решения и М-функцию. Параметр d' , равный относительной энергии сигнала, называется *отноше-*

Р и с. 9.3. РХ для различных значений параметра d'



Р и с. 9.4. Нормальная аппроксимация М-функции



нием сигнал/шум. Наиболее важной особенностью нейронных систем является зависимость d' в (9.5) не только от внешнего источника шума, но также и от внутренних шумов нейрональной системы. Как будет показано ниже, действительная величина спектральной плотности $N/2$ может в несколько раз превышать $N_0/2$ (9.5) для внешнего источника шума.

Для того чтобы получить РХ, необходимо исключить из системы (9.5) параметр x . Для численных расчетов это всегда легко сделать, пользуясь таблицами функции $\operatorname{erfc} x$ или функции Лапласа $\Phi(x)$. РХ для различных значений d' изображены на рис. 9.3.

Для построения М-функции необходимо по заданной вероятности ложной тревоги $\alpha = p(S/n)$ из второго уравнения (9.5) определить значение x_0 (рис. 9.4). Тогда уравнение М-функции можно записать в виде

$$p(S/s) = \operatorname{erfc}(x_0 - d'). \quad (9.6)$$

М-функция, определяемая (9.6), изображена на рис. 9.4. В вероятностном масштабе М-функции для различных значений p (S/n) изображены на рис. 8.2.

Рабочие характеристики и М-функции при восприятии временных сигналов отличаются некоторыми особенностями. В соответствии с уравнениями (9.5) и (9.6) обе кривые зависят от параметра d' — отношения сигнал/шум, который для временного сигнала $x(t)$ зависит от энергии сигнала s и спектральной плотности шума $N_0/2$. Параметр d' можно определить так же, как в элементарной теории (см. главу 7), формулой

$$d' = \Delta m / \sigma = (m_s - m_n) / \sigma.$$

Однако m_s , m_n , σ следует вычислять уже для статистики G , а не для сигнала $x(t)$:

$$m_s = M(G/s), \quad m_n = M(G/n), \quad \sigma^2 = D(G),$$

где $M(G/s)$ — условное математическое ожидание статистики G при $x(t) = s(t) + n(t)$; $M(G/n)$ — условное математическое ожидание при $x(t) = n(t)$.

§ 3. Построение рабочей характеристики и М-функций для второй схемы опытов

Во втором случае эксперимент ведется по дифференциальной схеме.

Так же как в абсолютной схеме, здесь можно использовать для принятия решения статистику G . Отличие состоит лишь в том, что сигнал $x(t)$, на основании которого детектор принимает решение, будет уже иметь другой вид, а именно:

$$x(t) = c(t) + n(t) : H_1, \quad x(t) = c(t) + s(t) + n(t) : H_2.$$

Так же как и раньше, $n(t)$ — шум (внутренний + внешний), $c(t)$ — основной сигнал, на фоне которого обнаруживается сигнал $s(t)$. В экспериментах часто выбирают

$$c(t) = A \cos \omega t \quad \text{и} \quad s(t) = \Delta A \cos \omega t,$$

так что $s(t)$ находится в фазе с сигналом $c(t)$.

Полагая, так же как и раньше, $n(t)$ гауссовским, получим для статистики G нормальные апостериорные плотности $f(g/s)$ и $f(g/n)$. Для того чтобы записать их, оценим математическое ожидание и дисперсию статистики G для второй схемы опытов. Не повторяя вычислений, которые вполне аналогичны уже сделанным, получаем

$$\begin{aligned} m_n &= M(G_n) = \int c(t) s(t) dt = (c, s), \\ m_s &= M(G_s) = \int [s(t) + c(t)] s(t) dt = E_s + (c, s), \\ D &= D(G) = \frac{N_0}{2} \iint s(t_1) s(t_2) \delta(t_1 - t_2) dt_1 dt_2 = \frac{N_0}{2} E_s, \end{aligned} \quad (9.7)$$

где m_s — условное математическое ожидание G при условии $x = c(t) + s(t) + n(t)$; m_n — условное математическое ожидание при условии $x = c(t) + n(t)$; D — дисперсия статистики G , которая имеет одно и то же значение для H_1 и H_2 .

Дисперсия D вычислена при тех же предположениях, что и в первой схеме опытов, а именно для «белого» гауссовского шума $n(t)$ интенсивностью N_0 , и равна $D = N_0 E_s / 2$.

Таким образом, параметр d' для дифференциальной схемы также определяется формулой (9.2).

Апостериорные плотности вероятности при гипотезах H_1 и H_2 являются нормальными и имеют вид

$$f(g/n) = (2\pi D)^{-1/2} \exp \left[-\frac{(g - m_n)^2}{2D} \right],$$

$$f(g/s) = (2\pi D)^{-1/2} \exp \left[-\frac{(g - m_s)^2}{2D} \right].$$
(9.8)

Интегрируя функции плотности (9.8), получаем для $p(S/s)$ и $p(S/n)$ выражения, аналогичные (9.5):

$$p(S/s) = \operatorname{erfc}(x - d'), \quad p(S/n) = \operatorname{erfc} x, \quad (9.9)$$

где

$$x = [g_0 - (c, s)]/\sigma; \quad d' = E_s/\sigma = (2E_s/N)^{1/2} \quad (9.10)$$

Уравнения (9.9) отличаются от соответствующих уравнений (9.5) лишь тем, что вероятность ложной тревоги зависит от скалярного произведения (c, s) , которое входит в x (9.10).

Первое уравнение (9.9) определяет М-функцию. В отличие от первой схемы здесь М-функция зависит также от *основного сигнала* $c(t)$. Эта зависимость является сложной, так как x зависит от скалярного произведения (c, s) , входящего в выражение x в соответствии с (9.10).

В случае, если $c(t)$ и $s(t)$ — гармонические сигналы, находящиеся в фазе, скалярное произведение (c, s) равно

$$(c, s) = A \cdot \Delta A \int_0^T c(t) s(t) dt = A \cdot \Delta A \int_0^T \cos^2 \omega t dt =$$

$$= \frac{\Delta A}{A} E_c = k E_c,$$

где $E_c = A^2 \int_0^T \cos^2 \omega t dt$ — энергия основного сигнала. В этом случае (c, s) пропорционально энергии основного сигнала. Если $c(t)$ и $s(t)$ имеют сдвиг по фазе на четверть периода, то

$$c(t) = A \cos \omega t, \quad s(t) = \Delta A \cos(\omega t \pm \pi/2) = \pm \Delta A \sin \omega t.$$

Тогда, если интервал наблюдения $(0, T)$ кратен периоду сигналов,

скалярное произведение равно

$$(c, s) = \pm \Delta A \cdot A \int_0^T \cos \omega t \sin \omega t dt = 0.$$

В этом случае говорят, что сигналы c и s ортогональны. Тогда в соответствии с (9.10) уравнения (9.9) переходят в уравнения (9.6). Дифференциальная схема в этом частном случае эквивалентна абсолютной схеме опытов. М-функция не зависит от основного сигнала $c(t)$. Помимо двух крайних случаев, когда угол φ между векторами c и s равен $\varphi = 0$ или $\varphi = \pi/2$, очевидно, могут быть промежуточные случаи, когда $0 < \varphi < \pi/2$.

Таким образом, в эксперименте по дифференциальной схеме в общем случае имеется семейство М-функций для различных основных сигналов. Для синфазных сигналов (9.7) семейство М-функций зависит от энергии основного сигнала E_c .

§ 4. Третья и четвертая схемы опытов

В третьей схеме опыты ведутся по абсолютной схеме с двумя интервалами наблюдения. В этом случае статистикой G , от которой зависит функция правдоподобия, так же как в первой схеме, является скалярное произведение

$$G = (s, x) = \int_0^T x(t) s(t) dt.$$

Однако в отличие от первой схемы статистика G может принимать здесь различные значения: G и G_2 в двух интервалах наблюдения. В одном из интервалов содержится полезный сигнал, а в другом — один шум. Когда наблюдатель выбирает интервал с большим значением G , то выбор будет правильным, если большее значение G соответствует сигналу

$$x(t) = s(t) + n(t).$$

Поэтому вероятность попадания равна

$$p(S/s) = p(G_1 > G_2) = p(G_1 - G_2 > 0).$$

Следовательно, для решения задачи необходимо знать распределение разности

$$z = G_1 - G_2. \quad (9.11)$$

Если шум $n(t)$ является нормальным, то статистики G_1 , G_2 будут нормальными случайными величинами.

Параметры m_z и σ_z плотности

$$f(z) = (2\pi\sigma_z^2)^{-1/2} \exp \left[-(z - m_z)^2 / 2\sigma_z^2 \right]$$

легко определяются. Имеем

$$m_z(sn) = M[z/sn] = M[G_1 - G_2/sn] = M\left[\int [s_1(t) + n_1(t)] \times \right. \\ \left. \times s_1(t) dt - \int n_2(t) s_2(t) dt\right] = E_s, \quad (9.12)$$

$$m_z(ns) = M[z/ns] = M[G_1 - G_2/ns] = -E_s,$$

$$D_z = D[z] = M\left\{\int [s_1(t) + n_1(t)] s_1(t) dt - \int n_2(t) s_2(t) dt - E_s\right\}^2 = \\ = M\left[\int n_1(t) s_1(t) dt - \int n_2(t) s_2(t) dt\right]^2 = NE_s,$$

где $m_z(sn)$ — математическое ожидание величины z при условии, что в первом интервале появился сигнал s , а во втором — один шум n , т. е. имеет место комбинация sn ; $m_z(ns)$ — математическое ожидание при условии появления комбинации ns ; D_z — дисперсия величины z , одинаковая для двух условий; $n_1(t)$, $n_2(t)$ — случайные функции шума в первом и втором интервалах; $s_1(t)$, $s_2(t)$ — сигналы в первом и втором интервалах наблюдения.

При вычислении математических ожиданий $m_z(sn)$, $m_z(ns)$ и дисперсии D_z были приняты следующие упрощающие предположения:

1) шумы n_1 и n_2 независимые, имеют спектральную плотность $N/2$;

2) энергии сигналов s_1 и s_2 равны $E_{s_1} = E_{s_2} = E_s$.

Теперь для апостериорных плотностей вероятности величины z можно записать

$$f(z/sn) = (2\pi D_z)^{-1/2} \exp\left[-\frac{(z - E_s)^2}{2D_z}\right];$$

$$f(z/ns) = (2\pi D_z)^{-1/2} \exp\left[-\frac{(z + E_s)^2}{2D_z}\right].$$

Вероятности $p(S/s)$ и $p(S/n)$ получаются интегрированием функций

$$p(S/s) = \int_{x_0}^{\infty} f(z/sn) dz = \text{erfc}(x - d'), \quad (9.13)$$

$$p(S/n) = \int_{x_0}^{\infty} f(z/ns) dz = \text{erfc}(x + d');$$

$$x = x_0/\sigma, \quad d' = E_s/\sigma = \sqrt{2E_s/N}, \quad (9.14)$$

где x_0 — значение порога, при котором принимали решение.

Уравнения (9.13) определяют РХ и М-функции в эксперименте по абсолютной схеме в двойном интервале. Эти уравнения незначительно отличаются от соответствующих уравнений (9.9) для дифференциальной схемы опытов в одном интервале.

Все замечания, относящиеся к построению РХ и М-функций для первой схемы, полностью применимы к уравнениям (9.13).

В четвертой схеме наблюдения проводятся в двух интервалах и решается задача проверки гипотез H_1 и H_2 о наличии в сигнале $x(t)$ сигнала $s(t)$:

$$x(t) = c(t) + n(t) : H_1, \quad x(t) = c(t) + s(t) + n(t) : H_2.$$

Таким образом, речь идет об обнаружении сигнала $s(t)$, являющегося приращением основного сигнала $c(t)$.

Если для принятия решения о наличии сигнала $s(t)$ в четвертой схеме также использовать величину z , то легко показать, что уравнения для РХ и М-функции оказываются тождественными уравнениям (9.13). Это имеет место потому, что использование статистики z (9.14) предполагает полную симметрию наблюдений в обоих интервалах, благодаря чему порог принятия решения равен единице.

На этом мы закончим рассмотрение теории РХ и М-функций для различных схем опытов.

§ 5. Закон Вебера для временных сигналов

Можно уточнить теорию М-функций, если заметить, что они должны следовать закону Вебера (в дифференциальной схеме опытов). Как уже указывалось в главе 7, для того чтобы получить такое соответствие, необходимо внести в теорию дополнительное условие о природе внутреннего шума детектора, которое не содержится в теории статистических решений и является опытным фактом.

Применительно к сигналам, являющимся функциями времени, закон Вебера можно записать в виде

$$E_s/E_c = \text{const}, \quad (9.15)$$

где E_s — энергия «едва различимого» сигнала. т. е. различимого с вероятностью, равной 1/2. Закон Вебера относится к дифференциальной схеме опытов. Порог энергии g_0^* для обнаружения приращения $s(t)$ с вероятностью, равной 1/2, на основании (7.6) и (9.7) равен

$$g_0^* = m_s = E_s + (c, s). \quad (9.16)$$

Для дифференциальной схемы опытов имеют место уравнения (9.9), отличающиеся от уравнений (7.1) статической задачи наличием скалярного произведения (c, s) в выражении для порога x (см. уравнение (9.10)).

На основании уравнения (9.10) значение параметра x , соответствующее порогу g_0^* принятия решения, равно

$$x = [g_0^* - (c, s)]/\sigma,$$

откуда на основании (9.16) следует

$$E_s^* = x\sigma. \quad (9.17)$$

Это уравнение аналогично уравнению (7.2) для статической модели обнаружения. Дифференциальный порог x определяется из второго уравнения (9.9) по заданной вероятности ложной тревоги. Если теперь в (9.17) положить $\sigma = kE_s$, то будет иметь место закон Вебера (9.15). Следует заметить, что выражение (9.15) не зависит от величины (c, s) и, следовательно, не зависит от разности фаз сигналов $c(t)$ и $s(t)$.

§ 6. Соответствие теории экспериментальным данным.

Параметр d'

Общая теория обнаружения временных сигналов, изложенная в главах 8 и 9, должна допускать экспериментальную проверку.

Сравнение экспериментальных РХ и М-функций с соответствующими теоретическими кривыми для различных схем опытов дает лишь косвенные доказательства правильности теории. В самом деле, аппроксимация соответствующих экспериментальных кривых является неоднозначной процедурой, и поэтому хорошая аппроксимация не может служить доказательством правильности теории.

Поэтому возникает важная задача сравнения теории с экспериментом по некоторым качественным признакам, не допускающим неоднозначных выводов. И такое качественное сравнение теории обнаружения с экспериментом действительно возможно. Существенную роль при этом играет параметр d' (отношение сигнал/шум). Ниже эта задача рассматривается подробно.

В главе 8 были предложены две теоретические схемы обнаружения сигнала в шуме: обнаружение известного сигнала $s(t)$ в сигнале $x(t) = s(t) + n(t)$ и обнаружение гармонического сигнала $s(t)$ с неизвестной фазой (детектор огибающей). Рассмотрим, насколько сильно различаются эти две схемы при количественной оценке.

Для нормальных апостериорных плотностей $f(x/s)$ и $f(x/n)$ первая схема приводит к уравнениям (9.5) для РХ и М-функций. Соответствующие РХ приведены на рис. 9.3.

Вторая схема приводит к детектору огибающей. При этом получаются более сложные уравнения (8.31). Однако эти уравнения также приводят к РХ и М-функциям, подобным кривым на рис. 9.3.

Параметром РХ и аргументом М-функций в обеих схемах является отношение сигнал/шум (d'), равное

$$d' = (2E_s/N)^{1/2},$$

где E_s — энергия сигнала на интервале наблюдения $(0, T)$; $N/2$ — значение спектральной плотности шума $n(t)$.

Различие между этими двумя схемами невелико. Оно состоит лишь в том, что значение d' в схеме детектора огибающей, необходимое для обнаружения сигнала с данной вероятностью ложной

тревоги $p(S/n) = \alpha_0$ и данной вероятностью обнаружения $p(S/s)$, несколько больше, чем в схеме с полностью известным сигналом. Так, например, для $\alpha_0 = 10^{-10}$ и $p(S/s) = 0,9$ для детектора огибающей $d' = 8,0$, а для детектора известного сигнала $d' = 7,6$. (Более подробно сравнение этих двух схем рассматривается в [6].)

Таким образом, обе схемы приводят лишь к количественным различиям, и выбор той или иной схемы не может быть сделан на основании того или иного качественного признака.

Такой признак, допускающий в известной степени качественную проверку теории, содержит параметр d' .

Параметр d' является степенной функцией энергии сигнала E_s с показателем $1/2$. Это обстоятельство можно использовать как качественный признак, характеризующий соответствие теории эксперименту.

Действительно, парабола $d' = kE_s^{1/2}$ — выпуклая кривая и качественно отличается от линейной функции

$$d' = aE_s + b$$

и от параболы n -го порядка

$$d' = aE_s^n, \quad n > 1.$$

Однако для того чтобы использовать зависимость $d'(E_s)$ в качестве индикатора совпадения теории с экспериментом, следует правильно оценивать параметр d' по экспериментальным данным.

Как уже указывалось, отличительной особенностью нейронной системы по сравнению с оптимальным приемником является зависимость параметра d' от собственных шумов нейронной системы, которые могут отсутствовать или быть очень малыми в оптимальном приемнике. Поэтому при оценке параметра d' для нейронной системы необходимо учитывать собственные шумы последней. Если эксперимент ведется при отсутствии внешнего шума, то параметр d' зависит только от собственных шумов нейронной системы.

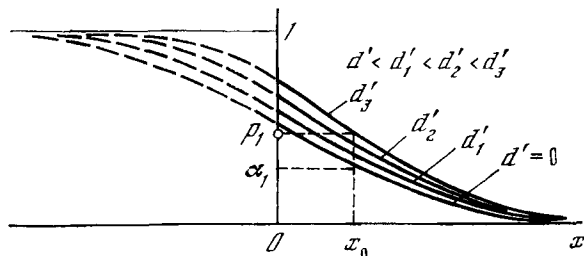
Основной метод оценки параметра d' состоит в наложении сетки теоретических РХ или М-функций (см. уравнение (9.5)) на соответствующие экспериментальные кривые. Тогда значение d' можно прочесть на соответствующей теоретической кривой, наилучшим образом аппроксимирующей экспериментальные точки.

Если необходимо получить зависимость $d'(E_s)$, то нужно использовать семейство экспериментальных РХ, полученных для разных значений энергии сигнала E_s . Значение энергии сигнала E_s при этом считается с генератора внешнего сигнала $s(t)$.

Эквивалентная графическая процедура оценки параметра d' процесса решения показана на рис. 9.5, на котором изображено семейство кривых $\text{erfc}(x - d')$ для различных значений параметров ($d' = 0; 0,5; 1,0; \dots$).

Пусть в некоторых условиях произведен эксперимент и получена вероятность попадания $p(S/s) = p_1$, соответствующая вероятности ложной тревоги α_1 . Тогда проводится горизонтальная прямая $y = \alpha_1$ и находится точка ее пересечения с кривой $\text{erfc } x_0$, по которой определяется значение x_0 . Затем проводятся вертикальная линия $x = x_0$ и вторая горизонтальная линия $y = p_1$.

Р и с. 9.5. Оценка параметра d'



Искомая линия $\text{erfc}(x_0 - d')$, по которой определяется d' , проходит через точку пересечения линий $x = x_0$ и $y = p_1$.

Графический способ особенно удобен, если воспользоваться вероятностным масштабом по оси ординат. Тогда кривые $\text{erfc } x$ становятся прямыми линиями и определение d' значительно упрощается.

Таким образом, получается экспериментальная зависимость $d'(E_s)$. Если эта зависимость имеет вид

$$d' = (2E_s/N)^{1/2} = kE_s^{1/2}, \quad (9.18)$$

то можно считать, что теория обнаружения применима для описания экспериментальных данных.

Действительно, в этом случае весьма вероятно, что собственный шум остается постоянным ($N/2 = \text{const}$) и нужная зависимость получается в соответствии с уравнением (9.18).

Для быстрой оценки параметра d' на основании экспериментальных кривых были составлены таблицы (Приложение VII). Входными параметрами таблиц являются вероятности $p(S/s)$ и $p(S/n)$, определяемые по экспериментальной рабочей характеристике. В Приложении VII рассматривается применение таблиц для разных схем опытов. Таблицы можно использовать также для построения М-функций, а также в некоторых других случаях, например для оценки точности нормальной аппроксимации плотностей вероятностей $f(x/s)$ и $f(x/n)$ и т. д. Все эти вопросы подробно рассмотрены в Приложении VII.

При анализе экспериментальной кривой $d'(E_s)$ не менее важным является вопрос: какие выводы можно сделать, если кривая $d'(E_s)$ не описывается уравнением (9.18)

В этом случае нельзя сделать какие-либо заключения о соответствии теории и эксперимента.

Действительно, несовпадение экспериментальной кривой $d'(E_s)$ с уравнением (9.18) может быть вызвано двумя причинами: либо теория обнаружения в данном случае неприменима, либо теория применима, но собственный шум системы $n(t)$ зависит от энергии сигнала E_s . В этом случае зависимость (9.18) уже не будет иметь места.

Разграничение этих двух возможностей на основании предложенных схем экспериментов не представляется возможным. Требуются другие экспериментальные схемы, позволяющие разделить эти две возможности.

Соображение о зависимости интенсивности собственного шума N системы от сигнала $s(t)$ представляется весьма важным. Оно приводит к новой задаче — оценке интенсивности собственного шума нейронной системы.

Как уже указывалось, оценка собственного шума представляется важной по двум причинам.

Во-первых, она полезна для представления о предельных возможностях нейронной системы. В частности, важно иметь представление о предельной абсолютной и дифференциальной чувствительности системы.

Во-вторых, по величине и характеру собственного шума можно судить о внутренней структуре нейронной системы. Нейронная система является системой с переменной структурой. Действи-

тельно, для разных сигналов $s(t)$ включаются различные нейронные цепочки, что и является причиной изменения собственного шума системы. Это изменение структуры и приводит к разной величине и характеру собственного шума.

Поэтому оценка собственного шума нейронной системы является весьма важной и интересной задачей. Эту задачу можно решить, если предположить, что в нейронной системе используется шкала отношения правдоподобия и имеет место уравнение (9.18).

Ввиду важности оценки собственных шумов системы ниже рассматривается решение этой задачи на основе экспериментальной РХ, представленной на рис. 9.6. Она получена в эксперименте по обнаружению звукового сигнала во внешнем белом шуме интенсивности N_0 . Эксперимент проводился по абсолютной схеме с одним интервалом стимулирования.

Экспериментальные результаты получены в работе [Ватсона, Риллинга и др. (см. [14]).

Теоретическая рабочая характеристика получена в предпо-

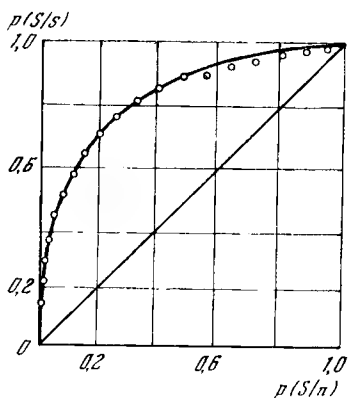


Рис. 9.6. РХ обнаружения звукового сигнала

жении, что сигнал обнаруживается детектором огибающей. Как уже указывалось, РХ в этом случае имеют такой же вид, как для детектора сигнала известной формы. Для теоретических РХ можно с достаточной точностью использовать нормальные плотности $f(x_l/s)$ и $f(x_l/n)$, которые имеют вид

$$f(x_l/s) = (2\pi D)^{-1/2} \exp \left[-\frac{(x_l - A)^2}{2\sigma^2} \right],$$

$$f(x_l/n) = (2\pi D)^{-1/2} \exp \left[-\frac{x_l^2}{2\sigma^2} \right],$$

где A — амплитуда сигнала $s(t)$; $\sigma^2 = N/T$; N/T — спектральная плотность суммарного шума. При этом следует помнить, что N относится к суммарному шуму. Его интенсивность равна сумме $N_0 + N_1$, где N_0 — интенсивность внешнего шума, N_1 — интенсивность внутреннего шума детектора. Предполагается, что внешний и внутренний шум статистически независимы.

В соответствии с первой схемой опытов теоретическая РХ определяется уравнениями (9.5) с параметром $d' = A/\sigma$. В результате аппроксимации экспериментальной РХ было найдено $d' = 2$. Это значение также легко определить, пользуясь таблицами d' Приложения VII.

С другой стороны, если учитывать интенсивность только внешнего источника шума, то можно определить, что $(d'_0)^2 = 14$. Как и следовало ожидать, величина d'_0 оказалась больше величины d' из-за того, что N_0 меньше интенсивности суммарного шума N .

Из этих данных легко определить соотношение между интенсивностью внешнего шума N_0 и интенсивностью суммарного шума $N = N_0 + N_1$.

Имеем для d' согласно (9.2)

$$(d')^2 = A^2/\sigma^2 = A^2 T/N,$$

откуда на основании соотношений $E_s = A^2 T/2$ и $\sigma^2 = N/T$ получаем

$$(d')^2 = AT/N.$$

С другой стороны, если учитывать только внешний шум, то

$$(d'_0)^2 = 2E_s/N_0 = A^2 T/N_0.$$

Из выражений для d' и d'_0 следует:

$$N/N_0 = (d'_0/d')^2.$$

Наконец, принимая $(d'_0)^2 = 14$ и $(d')^2 = 4$, можно получить соотношение

$$N/N_0 = 14/4 \approx 3,49.$$

Для среднеквадратичных значений σ_0 и σ внешнего и суммарного шумов получается соотношение

$$\sigma/\sigma_0 \approx 1,87.$$

Из рассмотренного примера видно, что внутренние шумы детектора достигают значительной величины и ими нельзя пренебречь. В частности, при построении М-функций и РХ в параметре $d' = (2E_s/N)^{1/2}$ следует обязательно использовать величину N , относящуюся к суммарному шуму детектора. Если внешний источник шума отсутствует, то N относится только к внутреннему шуму детектора.

Возвращаясь к рассмотренному примеру, можно оценить параметр d' для отдельных экспериментальных точек РХ (см. рис. 9.6), пользуясь таблицей d' (Приложение VII). Так, например, для $p(S/s) = 0,83$ и $p(S/n) = 0,4$ $d' = 1,20$, а $p(S/s) = 0,7$ и $p(S/n) = 0,2$ $d' = 1,36$. Таким образом, значения d' , найденные для разных экспериментальных точек, отличаются от значения $d' = 2$, использованного в примере. Это связано с тем, что d' является средним значением, полученным для всех экспериментальных точек рис. 9.6.

В заключение следует заметить, что в исследованиях часто не учитывается собственный шум нейронной системы. Параметр d' в большинстве работ относится только к внешнему источнику шума. В частности, при построении классических психометрических функций до сих пор используется параметр E_s/N_0 , где N_0 — интенсивность внешнего шума. Именно этим обстоятельством объясняется большое расхождение между значениями d'_0 и d' для случая РХ (рис. 9.6). Непонимание влияния собственных шумов сильно затрудняет трактовку экспериментальных результатов и часто приводит к неправильным выводам.

Однако в последнее время здесь достигнут определенный прогресс. Так, в работе Кона, Грина, Таннера [9] была предпринята попытка оценки параметра d' по сигналу на выходе нейрона зрительного нерва. Величина d' при этом оценивалась с учетом собственного шума нейрона. Интересным результатом работы является нелинейная зависимость $d'(E_s)$.

Таким образом, здесь мы встречаемся с наиболее сложным случаем, когда уравнение (9.18) не подтверждается в эксперименте. Для объяснения этого результата требуются дальнейшие исследования.

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ДЕТЕКТОР. ПРОБЛЕМА КРИТИЧЕСКОЙ ПОЛОСЫ

§ 1. Теория энергетического детектора

В настоящей главе динамическая теория применяется для анализа работы энергетического детектора — устройства для обнаружения полезного сигнала по значению «энергии»

$$E_s = \int_0^T s^2(t) dt.$$

Энергетический детектор может служить моделью системы для восприятия звуковых сигналов. Кроме того, энергетический детектор оказывается полезным для иллюстрации эффективности применения теории статистических решений к произвольным системам обнаружения.

Идея энергетического детектора связана с теорией слухового анализатора Гельмгольца (резонансная теория слуха).

Позже эта идея еще раз использовалась Флетчером в работе, посвященной критической полосе частот. Он установил, что существует критическая ширина спектра шума, маскирующего полезный сигнал, равная 60 гц [13]. Причем увеличение этой ширины полосы уже не оказывает влияния на обнаружение сигнала. Этот эксперимент наводит на мысль о существовании полосового фильтра.

После работы Флетчера исследованием энергетического детектора занимался ряд исследователей (см. Грин, Светс [14]).

В этой главе энергетический детектор рассматривается для двух типов экспериментов — по абсолютной и дифференциальной схемам. Определяются РХ и М-функции детектора.

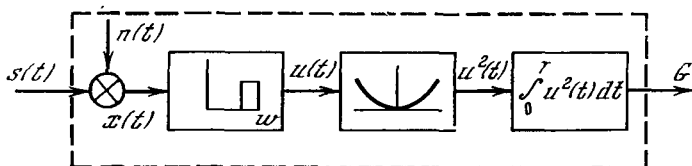
На основании оценки внутреннего шума детектора (см. главу 9) дается оценка критической полосы детектора, которая оказывается близкой к 60 гц.

Описание энергетического детектора. Схема энергетического детектора показана на рис. 10.1. Он состоит из полосового фильтра с полосой пропускания 2ω и с прямоугольной частотной характеристикой, квадратичного детектора и интегратора. Квадратичный детектор выполняет операцию $u^2(t)$ ($u(t)$ — сигнал на выходе полосового фильтра). Наконец, интегратор выполняет операцию

$$G = \int u^2(t) dt, \quad (10.1)$$

На выходе детектора наблюдается «энергия» G сигнала $u(t)$, содержащего частоты в полосе $(-w, w)$. Статистика G является случайной величиной, зависящей от случайной функции $u(t)$.

РХ и М-функции энергетического детектора. Для того чтобы получить РХ и М-функции энергетического детектора, необходимо знать апостериорные плотности вероятности статистики G при различных сигналах $x(t)$ на входе детектора.



Р и с. 10.1. Схема энергетического детектора

Если эксперимент ведется по абсолютной схеме (первая и третья схемы главы 9), то такими апостериорными плотностями будут функции $f(g/s)$ и $f(g/n)$ соответственно при условиях

$$x(t) = s(t) + n(t) : H_2, \quad x(t) = n(t) : H_1.$$

Если эксперимент ведется по дифференциальной схеме, то необходимо вычислить функции апостериорной плотности $f(g/s)$ и $f(g/n)$ при условиях

$$x(t) = s(t) + n(t) + c(t) : H_2, \quad x(t) = c(t) + n(t) : H_1.$$

Эти вычисления были выполнены в Приложении VI.

Оказывается, что апостериорные плотности $f(g/s)$ и $f(g/n)$ соответствуют распределению χ^2 с $2wT$ степенями свободы. При обычных используемых интервалах наблюдения $2wT > 15$. При этом условии χ^2 -распределение с достаточной точностью аппроксимируется нормальной плотностью. Для нормальных апостериорных плотностей РХ и М-функция определяются уравнениями

$$p(S/s) = (2\pi D_s)^{-1/2} \int_{\lambda(x) \geq \lambda_0}^{\infty} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{(x - m_s)^2}{D_s} \right] dx, \quad (10.2)$$

$$p(S/n) = (2\pi D_n)^{-1/2} \int_{\lambda(x) \geq \lambda_0}^{\infty} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{(x - m_n)^2}{D_n} \right] dx, \quad (10.3)$$

которые следуют из (3.4). Они соответствуют нормальным апостериорным плотностям с разными дисперсиями σ_n^2 и σ_s^2 .

Параметры m_s , m_n , D_s , D_n для абсолютной и дифференциальной схем опытов с одним интервалом стимулирования определены в Приложении V (см. формулы (V.7), (V.8), (V.15) — (V.18)).

Для абсолютной схемы опытов

$$\begin{aligned} m_n &= N_0 w T, & D_n &= N_0^2 w T, \\ m_s &= N_0 / 2 (2wT + \lambda), & D_s &= N_0^2 (wT + \lambda). \end{aligned} \quad (10.4)$$

Для дифференциальной схемы опытов

$$\begin{aligned} m_n &= N_0 w T + E_s, & D_n &= N_0^2 (wT + \lambda), \\ m_s &= N_0 \left(wT + \frac{E_{c+s}}{N_0} \right), & D_s &= N_0^2 w T. \end{aligned}$$

Для вычисления вероятности попаданий $p_2(S/s)$ в опытах с двойным интервалом стимулирования делают допущение, которое уже использовалось в главе 9. Предполагают, что решение о присутствии сигнала в первом интервале (комбинация sn) зависит лишь от разности статистик G_1 и G_2 в первом и втором интервалах наблюдения. Такое предположение оправдано, если наблюдениям в первом и втором интервалах приписывается одинаковый вес.

В этом случае решение может приниматься на основании наблюдения случайной величины

$$z = G_1 - G_2. \quad (10.5)$$

Как показано в Приложении VI, величина z распределена нормально. Моменты величины z приведены в Приложении VI.

Вероятность попаданий $p_2(S/s)$ для абсолютной схемы с двумя интервалами стимулирования определяется формулой

$$p_2(S/s) = \operatorname{erfc} h_1, \quad (10.6)$$

где

$$h_1 = \frac{E_s}{N_0 (2wT + \lambda)^{1/2}}. \quad (10.7)$$

Для дифференциальной схемы опытов $p_2(S/s)$ равна

$$p_2(S/s) = \operatorname{erfc} h_2, \quad (10.8)$$

где

$$h_2 = \frac{E_{c+s} - E_c}{N_0 \left(2wT + \frac{2E_c}{N_0} + \frac{2E_{c+s}}{N_0} \right)^{1/2}}.$$

Относительно М-функций, определенных по статистике z (10.5), следует сделать некоторые замечания. Когда эксперимент проводится по абсолютной схеме, М-функция определяется уравнением (10.6) и, следовательно, описывается нормальным законом распределения. Аргументом М-функции является величина h_1 , отличающаяся от отношения сигнал/шум, которое использовалось в главе 9. Для обычных интервалов наблюдения, используемых в экс-

периментах,
 $wT > E_s/N_0$.

При этих условиях приближенно можно считать h_1 равной

$$h_1 \cong \frac{E_s/N_0}{(2wT)^{1/2}}.$$

Так как величина wT постоянна, то за аргумент М-функции следует принять величину отношения энергии сигнала E_s к спектральной плотности шума N_0 :

$$E_s/N_0 \cong h_1 (2wT)^{1/2}. \quad (10.9)$$

Для экспериментов по дифференциальной схеме М-функция также является нормальным законом распределения. Аргументом М-функции будет величина h_2 (10.8).

Когда полезным является сигнал $s(t)$, синфазный с сигналом $c(t)$, имеем

$$s(t) = \Delta A \cos \omega t, \quad c(t) = A \cos \omega t.$$

Следовательно,

$$s(t) = kc(t),$$

и выражение для h_2 (10.8) принимает вид

$$h_2 = \frac{(k^2 + 2k) E_c/N_0}{[2wT + E_c(2 + 2k + k^2)/N_0]^{1/2}}. \quad (10.10)$$

Обычно $E_c/N_0 \gg wT$ и $k \ll 1$, поэтому приближенно можно считать

$$h_2 \approx \frac{2k E_c/N_0}{(2E_c/N_0)^{1/2}},$$

а так как

$$\sqrt{E_s} = k \sqrt{E_c},$$

то

$$h_2 \approx \sqrt{2E_s/N_0}. \quad (10.11)$$

Таким образом, аргументом М-функции в случае дифференциальной схемы является введенный ранее параметр d' .

Когда между сигналами $c(t)$ и $s(t)$ имеется разность фаз, уравнение М-функции имеет вид (10.8). Параметр h_2 в этом случае определяется формулой

$$h_2 = \frac{E_s + (c, s)/N_0}{(2wT + 2E_c/N_0 + 2E_{c+s}/N_0)^{1/2}}, \quad (10.12)$$

где $(c, s) = \int c(t) s(t) dt$.

Если скалярное произведение $(s, c) \neq 0$, то его величина зависит как от сигнала $c(t)$, так и от сигнала $s(t)$. Если $(s, c) = 0$, то числитель h_2 линейно зависит от E_s (а не от $E_s^{1/2}$). Таким образом, М-функции энергетического детектора зависят от скалярного произведения (c, s) . Пфафлин и Матье в своей работе (см. [14]) экспериментально подтвердили эту зависимость. Однако еще не существует достаточных экспериментальных данных для окончательного выяснения этой зависимости.

Следует также отметить недостаток нормальной аппроксимации (10.6) М-функций в случае использования статистики G (10.5).

Для аппроксимации, очевидно, может быть использована только часть кривой $\text{erfc } x$ для $x \geq 0$. Следовательно, вероятности ложной тревоги, определяемые для $x = 0$, должны удовлетворять ограничению

$$p(S/n) \geq 1/2.$$

Это существенное ограничение, так как обычно $p(S/n) < 1/2$. Следует заметить, что М-функции, определяемые параметрическим уравнением (10.2), не имеют этого недостатка. Как было показано в главе 9, вероятность ложной тревоги может в этом случае быть меньше $1/2$.

При сравнении РХ и М-функций статистики G энергетического детектора (10.2) с РХ и М-функциями обычного детектора (уравнение (9.9)) обнаруживается различие между ними. Это отличие обусловлено разными значениями параметров используемых нормальных апостериорных плотностей $f(g/s)$ и $f(g/n)$. В то время как для энергетического детектора значения параметров определяются согласно уравнениям в Приложении VI, значения параметров обычного детектора определяются уравнениями (9.9). Эти выражения в общем случае различны. При некоторых значениях параметров энергетический детектор может быть близок к обычному детектору.

§ 2. Учет собственных шумов системы

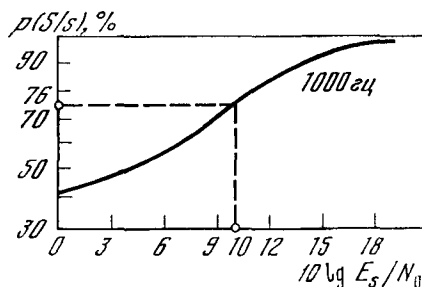
В главе 9 был установлен важный факт необходимости учета собственных шумов системы.

В модели энергетического детектора также нужно уметь учитывать собственные шумы нейронной системы и учитывать их в уравнениях (10.2). В частности, при использовании энергетического детектора как модели процесса восприятия необходимо помнить, что значение интенсивности N , принятое во всех формулах, зависит от внутренних шумов исследуемой системы.

Для выяснения значения этого факта рассмотрим экспериментально психометрические функции, приведенные на рис. 10.2. Эксперимент проводился по схеме с двумя интервалами стимулиру-

рования. Функции получены при обнаружении гармонических сигналов различных частот в диапазоне 400—4000 гц в «белом» шуме. Длительность сигнала равнялась 0,1 сек. Каждая точка на рис. 10.2 была получена на основании 25 наблюдений (см. [14]).

Таким образом, экспериментальные результаты на рис. 10.2 являются достаточно надежными. Тем не менее психометрические



Р и с. 10.2. Экспериментальные психометрические функции

функции рис. 10.2 трудно использовать, так как неясно, для каких значений $p(S/n)$ они получены. Аргументом психометрической функции рис. 10.2 является $10 \ln(E_s/N_0)$, вычисленный для внешнего источника шума с интенсивностью N_0 .

Как было показано в главе 9, в этом случае необходимо использовать спектральную плотность $N/2$ суммарного шума, состоящего из внешнего шума $N_0/2$ и собственного шума системы $N_1/2$ ($N = N_0 + N_1$).

По психометрической функции на рис. 10.2 можно оценить параметр $d' = (2E_s/N)^{1/2}$ методом, изложенным в главе 9. Эту оценку сделаем для сигнала частотой 1000 гц в точке $p(S/s) = 0,76$. Вследствие невозможности прямой оценки вероятности ложной тревоги $p(S/n)$, которая получается при значении $E_s = 0$ (отсутствующем на рис. 10.2), получим значение $p(S/n)$ путем экстраполяции экспериментальной функции для частоты 1000 гц. Значение $p(S/n)$ примем равным 0,1.

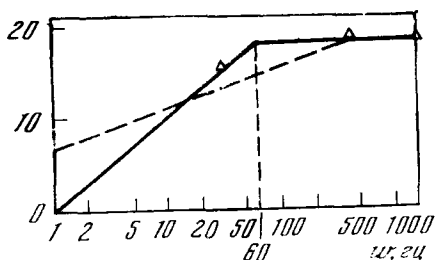
Теоретическая М-функция соответствует третьей схеме опытов с наблюдением в двух интервалах. Поэтому для оценки d' нужно воспользоваться уравнением (9.13). По таблицам параметра d' для $p(S/s) = 0,76$ и $p(S/n) = 0,1$ находим $d' = 1,98$. Если же определить d' по экспериментальной кривой (рис. 10.2), то значению $p(S/s) = 0,76$ соответствует $E_s/N_0 \cong 10$ и, следовательно, $d' = (2E_s/N_0)^{1/2} \approx 4,48$. Таким образом, в действительности система работает при отношении сигнал/шум в 2,26 раза меньше, чем можно себе представить на основании данных рис. 10.2. В дальнейшем это обстоятельство окажется решающим при оценке критической полосы.

§ 3. Проблема оценки критической полосы

Как уже указывалось, Флетчер [13] провел свои эксперименты по обнаружению гармонического сигнала в «белом» шуме. Изменяя ширину полосы частот «белого» шума, он показал, что существует критическая полоса $\omega = 60$ гц.

Увеличение ширины полосы свыше 60 гц не влияет на обнаружение сигнала. Однако уменьшение полосы улучшает обнаружение. Результаты Флетчера были подтверждены затем другими исследователями.

На рис. 10.3 приведены результаты, полученные различными исследователями в различных условиях. По оси абсцисс отложена ширина полосы (w). По оси ординат отложена относительная интенсивность сигнала (относительно N_0), который обнаруживается с заданной вероятностью. Экспериментальная кривая Флетчера (сплошная), как видно из рисунка, действительно дает значение 60 гц.



Р и с. 10.3. Оценка критической полосы

Этот результат весьма интересен, так как может указывать на некоторые внутренние параметры системы, определяющие величину критической полосы частот. Поэтому были предприняты попытки оценить величину критической полосы, пользуясь теорией энергетического детектора. Пользуясь (10.9), можно попытаться оценить значение w .

Для вероятности $p(S/s) = 0,76$ получаем $h_1 = 1/\sqrt{2}$. Следовательно, на основании (10.9)

$$E_s/N_0 = (wT)^{1/2}.$$

Для $p(S/s) = 0,76$ значение E_s/N_0 по экспериментальной кривой 1000 гц (см. рис. 10.2) равно 10.

Таким образом, имеем $10 = (wT)^{1/2}$ и, учитывая, что $T = 0,1$ сек, получаем $w = 1000$ гц. Эта величина на порядок превышает результат Флетчера. Поэтому применение теории в данном случае приводит к отрицательному результату.

Делались различные предположения для объяснения отрицательных результатов в оценке критической полосы. Например, предполагалось, что время интегрирования T не совпадает с временем наблюдения сигналов. Однако эти предположения вряд ли можно считать убедительными. До настоящего времени проблема критической полосы не решена. Вместе с тем эта проблема очень важна и требует объяснения.

Можно теперь вычислить значение критической полосы с учетом внутреннего шума детектора, психометрическая функция которого для сигнала 1000 гц представлена на рис. 10.2.

На основании соотношения (10.9) для энергетического детектора, заменив N_0 на N , можно получить значение w , найдя E_s/N из равенства $(d')^2 = 2E_s/N$, где $(d')^2 = (1,98)^2 = 3,92$. Вычисления дают $w \cong 39$ гц. Этот результат значительно ближе к результату Флетчера.

Разумеется, на основании психометрической функции рис. 10.2 трудно оценить действительную вероятность ложной тревоги. Поэтому полученный результат является скорее оценкой порядка величины критической полосы с учетом собственных шумов системы. Однако использованные значения вероятности попадания и вероятности ложной тревоги достаточно правдоподобны. Следовательно, эти вычисления доказывают, что влияние собственного шума весьма значительно. Действительно, значение критической полосы $w = 1000$ гц изменилось на порядок.

Если принять $p(S/s) = 0,76$ и $p(S/n) = 0,05$, то по таблицам d' можно определить $d' = 2,34$. При этом полоса оказывается равной $w = 75$ гц. Эта величина уже очень близка к результату Флетчера. Поэтому естественно предположить, что основной причиной неудач в оценке критической полосы является неумение оценивать внутренний шум детектора.

Как показано в главе 9, для оценки внутренних шумов используется РХ процесса решения. Это еще раз показывает важную роль рабочей характеристики при описании восприятия в целом.

§ 1. Пространство ощущений. Шкалирование

Способность человека к ощущению можно сравнить с измерением физической величины. Если вы измеряете прибором физическую величину, то последняя никогда не может быть измерена точно. Любой сколь угодно совершенный прибор вносит искажение в процесс измерения. Например, если вы измеряете электрическое напряжение, то могут быть искажены его величина и форма. Или отношение двух напряжений, определяемое прибором, может отличаться от своего истинного значения.

Известно, что таким свойством действительно обладают измерительные приборы. Так, например, вольтметр в области больших значений напряжения имеет насыщение и, следовательно, искажает величину измеряемого напряжения.

Таким образом, можно сказать, что измерительный прибор «создает собственное представление» об измеряемой величине. Он имеет «собственное пространство ощущений» воздействующей на него физической величины. В полной мере таким свойством обладает также нейронная система человека или животного.

Так, чистый тон, имеющий в 2 раза большую амплитуду колебаний по сравнению с другим звуком, не воспринимается нами как в 2 раза более громкий. Его громкость кажется почти такой же, как громкость первоначального звука. Таким образом, искажение действительного соотношения амплитуд является весьма значительным. Нейронная система играет здесь роль несовершенного измерительного прибора. Для субъективной оценки громкости Стивенсом была построена субъективная равномерная шкала сонов [22]. Один сон он определил как громкость тона 1000 гц, на 40 дб выше абсолютного порога слышимости. При этом звук громкостью 2 сона соответствует 47 дб и воспринимается как в 2 раза более громкий. Звук громкостью 3 сона воспринимается как звук, в 3 раза более громкий, и т. д.

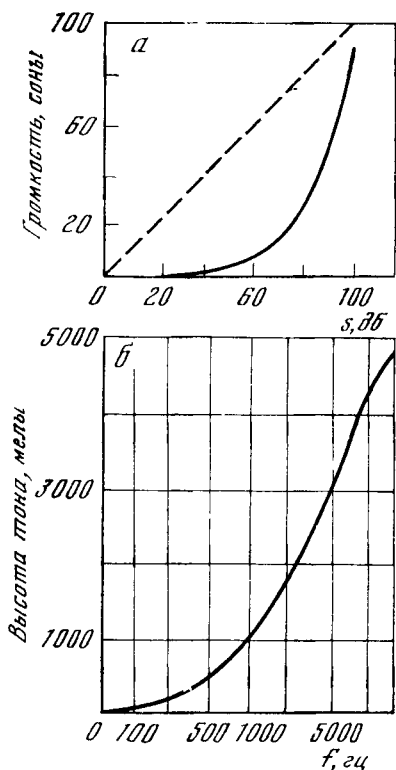
При высоких интенсивностях шкала сонов ведет себя удивительным образом. В точке 40 дб имеем 1 сон, в точке 80 дб получается громкость 25 сонов, а в точке 100 дб — громкость 80 сонов. Соответствующая кривая показана на рис. 11.1, а, где на оси абсцисс — громкость звука s в децибелах, а по оси ординат — субъективная равномерная шкала сонов. Из рис. 11.1, а можно

заметить, что обычная децибельная шкала (пунктирная кривая), применяемая инженерами-акустиками, не дает ощущения равномерного увеличения громкости.

Воодушевленный своими успехами при создании равномерной шкалы громкости Стивенс распространил свой метод на высоту звука. Известно, что шкала, используемая в музыке, является

логарифмической. Так, октавам соответствуют следующие частоты: 256, 512, 1024 гц и т. д. Считается, что это равные единицы в среднем диапазоне частот. Однако было замечено, что высокие октавы кажутся при восприятии большими, чем низкие.

Применив свой метод деления интервала частот пополам, Стивенс определил субъективные единицы высоты звука, воспринимаемые как равные, — мелы. Тон 1000 гц он принял за 1000 мелов. Тогда высота тона, ощущаемого как в 2 раза более низкий, равна 500 мелам. Однако, как показывает рис. 11.1, б, 500 мелам соответствует в действительности звук высотой 558 гц. Следовательно, интервал, субъективно воспринимаемый как октава, по частоте оказывается несколько меньше октавы. На рис. 11.1, б по оси ординат отложена субъективная высота тона в мелах, а по оси абсцисс — частота f в герцах. Шкала мелов лучше совпадает с логарифмической шкалой, чем шкала сонов.



Р и с. 11.1. Зависимость громкости от интенсивности стимула s (а) и зависимость высоты (в мелах) от частоты (в гц) (б)

Таким образом, в пространстве ощущений, или сенсорном пространстве, физические стимулы отображаются с изменением их масштабов. Изменение масштаба характерно не только для восприятия звуковых сигналов, но, также и для сигналов других модальностей.

Так, например, равномерной шкалой весов в сенсорном пространстве является субъективная шкала вегов. Субъективному отношению двух весов на шкале вегов соответствует в 2 раза меньшее отношение действительных весов. Например, при увеличении

веса от 100 до 200 г значение веса в вегах изменяется от единицы до четырех, т. е. в 4 раза.

Другими модальностями, для которых были построены шкалы в сенсорном пространстве, были вкус, яркость света и т. д.

Однако полезное для понимания нейронной системы ее сравнение с измерительным прибором далеко не раскрывает всех возможностей последней.

Во-первых, нейронная система имеет сразу несколько модальностей и способна воспринимать различные сигналы, звук, свет, тепло, запахи и т. д. Поэтому, если продолжить начатую аналогию, нейронную систему нужно уподобить универсальному измерительному прибору. Но и в этом случае аналогия окажется неполной, так как существуют психофизические шкалы более сложных объектов, чем объекты, определенные в пространстве стимулов (определенные на физическом континууме).

Можно построить психофизические шкалы в тех случаях, когда нет физического континуума, в котором располагаются ощущаемые нами объекты. Такие шкалы называют *психометрическими*. Например, можно использовать психометрическую шкалу для оценки цвета материала. В более общем случае психофизическую шкалу можно использовать для оценки личности, картины, научного исследования и т. д.

Такие шкалы были названы оценочными и широко применяются в психологии и повседневной жизни. Оценочные шкалы очень удобны, они позволяют «измерять» такие «объекты», за которые никогда не взялся бы физик.

Теперь мы должны окончательно оставить нашу аналогию нейронной системы с измерительным прибором, так как последний ни в коей мере не позволяет строить оценочные шкалы. Здесь мы отходим от проблемы просто измерения и сталкиваемся с качественно новыми — с проблемами распознавания и решения.

Итак, наряду с физическим пространством, в котором определяются ощущаемые нами объекты (различные предметы, источники света и звука и т. д.), имеется пространство ощущений, в котором эти объекты воспринимаются нейронной системой. Это пространство не является точной копией физического пространства.

Как мы убедились, уже при переходе от простейших стимулов к их ощущениям изменяется масштаб. В связи с этим методы изучения пространства ощущений в психофизике получили название *шкалирования*.

Шкалирование имеет значение с двух точек зрения.

Во-первых, изучение шкал позволяет детально исследовать структуру сенсорного пространства, в котором ощущаются предметы окружающего нас мира, и, таким образом, описать такие феномены, как ощущение и восприятие.

Во-вторых, шкалирование имеет большое практическое значение. Человек желает возможно лучше познать и использовать окружающие его явления. Этого он достигает за счет получения ин-

формации из окружающей среды благодаря своим анализаторам, взаимодействующим с различными вспомогательными системами, которые должны возможно лучше соответствовать его сенсорному пространству. Так, например, акустические системы должны быть приспособлены к его слуху. То же можно сказать о используемых световых системах и т. д.

Поэтому при проектировании таких систем следует учитывать особенности восприятия стимулов различных модальностей. Например, в акустической системе, предназначенной для прослушивания музыки, необходимы такие регуляторы громкости и тембра звука, которые соответствовали бы субъективному восприятию звука: регулятор звука должен менять громкость по шкале сонов, а не по децибельной шкале, как принято сейчас.

Если речь идет о восприятии цвета, то соответствующие системы должны иметь шкалы в мелах и т. д. Особую практическую ценность имеет оценочное шкалирование, так как его нельзя заменить чем-либо другим в силу сложности оцениваемых явлений.

В связи с этим нужно отметить, что один из основателей теории шкалирования С. Стивенс понимал шкалирование в самом широком смысле. Он считал, что «всякое правило приписывания числовых форм (чисел) определенным сторонам объектов или событий создает шкалу». Шкалы возможны потому, что может существовать изоморфизм между свойствами числовых рядов и эмпирическими операциями над физическими объектами. Этот изоморфизм может быть неполным. Только некоторые свойства объектов изоморфны свойствам чисел [15, 22].

Теперь можно перейти к формулировке основной задачи шкалирования. Она заключается в построении пространства ощущений для тех или иных задач, решаемых нейронной системой, что равносильно построению соответствующей шкалы. В такой формулировке шкалирование является одной из фундаментальных проблем психофизики. Однако в такой постановке проблема слишком обща и не может рассматриваться в этой небольшой книге.

Поэтому дальше ограничимся частным аспектом этой проблемы, а именно предположим, что исследуемые объекты заданы на физическом континууме первого класса [22] и для этого класса необходимо построить сенсорное пространство и соответствующую шкалу.

Итак, речь идет об установлении изоморфизма между сенсорным пространством и физическим пространством стимулов. Точная формулировка этой задачи такова.

Предположили, что в сенсорном пространстве определена величина ощущения I . Необходимо найти функцию

$$I = \psi(s), \quad (11.1)$$

связывающую величину стимула с величиной ощущения I .

Оставаясь верными своему методу, мы вначале построим шкалу, используя отношения правдоподобия. Об этой шкале упоми-

налось в главе 1 в связи с психофизической интерпретацией функции $\lambda(x)$. Затем мы рассмотрим логарифмическую шкалу Фехнера и степенную шкалу Стивенса и покажем, при каких условиях эти шкалы можно получить из шкалы отношения правдоподобия. Потом выясним, к чему сводятся различия между логарифмической и степенной шкалами. Это оказывается возможным благодаря понятию собственного шума нейронной системы (см. главу 9 и 10). И, наконец, сравним шкалу отношения правдоподобия с этими шкалами (§ 4).

§ 2. Шкала отношения правдоподобия

Рассмотрим построение сенсорного пространства на основании функции отношения правдоподобия. Чтобы построить шкалу для случая, когда ощущаемые объекты заданы в пространстве стимулов (физический континуум) [22], следует предварительно рассмотреть задачу обнаружения приращения Δs сигнала s на фоне собственного шума нейронной системы. В этом случае «системой проверяются» следующие две гипотезы:

$$x = s + \Delta s + n \text{ — гипотеза } S, \quad x = s + n \text{ — гипотеза } N.$$

Пусть для решения этой задачи используется функция отношения правдоподобия

$$\lambda[s, \Delta s, \sigma(s), x], \quad (11.2)$$

зависящая от наблюдаемого сигнала x , полезного сигнала s , приращения полезного сигнала Δs и среднеквадратичного значения $\sigma(s)$ собственного шума нейронной системы. В (11.2) предполагается, что вследствие малости Δs $\sigma(s + \Delta s) = \sigma(s)$. Конкретный вид функции (11.2) сейчас не имеет значения. Однако ее всегда можно определить, зная апостериорные плотности $f(x/s + \Delta s)$ и $f(x/s)$. Для нормальных плотностей функция $\lambda(x)$ была вычислена в главе 2. Для обнаружения приращения Δs с заданными вероятностями $p(S + \Delta S/s + \Delta s) = p_1$ и с вероятностью ложной тревоги α_0 следует выбрать порог λ_0 .

Допустим, что величины s и Δs изменяются, но при этом вероятности p_1 и α_0 остаются неизменными. Тогда порог λ_0 должен быть функцией s и Δs :

$$\lambda_0 = \lambda_0(s, \Delta s).$$

Рассмотрим пример с нормальными апостериорными плотностями $f(x/s + \Delta s)$ и $f(x/s)$; $m_s = s + \Delta s$, $m_n = s$; $\sigma_s = \sigma_n = \sigma(s)$.

Вероятность обнаружения приращения сигнала Δs равна (см. главу 4, § 2, (4.14)):

$$p(S + \Delta S/s + \Delta s) = \operatorname{erfc}\left(\frac{x^* - s - \Delta s}{\sigma(s)}\right), \quad (11.3)$$

где x^* — пороговое значение стимула, при котором принимается решение.

Логарифм отношения правдоподобия для этого случая записывается в виде

$$\ln [\lambda(x)] = \frac{2(x-s)\Delta s - \Delta s^2}{2\sigma^2(s)}. \quad (11.4)$$

Переход к логарифму здесь необходим. Действительно, приращение ощущения ΔI должно стремиться к нулю вместе с приращением стимула Δs . Этим свойством обладает, в частности, функция $\ln [\lambda(x)]$, так как при $\Delta s \rightarrow 0$, $\lambda(x) \rightarrow 1$, $\ln [\lambda(x)] \rightarrow 0$.

Пусть теперь вероятность обнаружения равна

$$p(S + \Delta S/s + \Delta s) = 1/2.$$

Эта вероятность достигается, если порог x^* является функцией s и Δs , имеющей вид (см. (7.1а)):

$$x^* = s + \Delta s. \quad (11.5)$$

Таким образом, когда порог x^* выбирается в соответствии с (11.5), то независимо от того, как изменяются s и Δs , вероятность обнаружения остается постоянной и равной $1/2$.

Порогу x^* соответствует единственный порог λ_0 на шкале отношения правдоподобия. Согласно (11.4) и (11.5) порог $\ln \lambda_0$ равен

$$\ln \lambda_0 = \ln [\lambda(x^*)] = \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta s}{\sigma(s)} \right)^2. \quad (11.6)$$

Следовательно, порог $\ln \lambda_0$ должен быть квадратичной функцией Δs . Кроме того, он зависит также от величины стимула s , от которого зависит $\sigma(s)$.

Вероятность ложной тревоги при этом равна (4.15)

$$p(S + \Delta S/s) = \alpha_0 = \operatorname{erfc} \left(\frac{s + \Delta s}{\sigma(s)} \right)$$

и изменяется вместе с изменением s и Δs .

После этих предварительных замечаний можно перейти к построению шкалы отношения правдоподобия.

Для обнаружения приращения Δs используется решающее правило

$$\lambda(x) \geq \lambda_0.$$

Поэтому естественно «измерять» ощущения, пользуясь шкалой отношения правдоподобия. За «приращение ощущения» ΔI можно принять какую-либо монотонную функцию $\tilde{\lambda}(\lambda_0)$, так как шкала $\lambda(x)$ определена с точностью до «монотонного преобразования». Таким образом, величину ΔI можно принять равной

$$\Delta I = k\tilde{\lambda}(\lambda_0), \quad (11.7)$$

где k — постоянная величина. В частности, $\tilde{\lambda}(\lambda)$ может быть логарифмической или какой-либо другой монотонной функцией, удовлетворяющей условию $\tilde{\lambda}(1) = 0$.

На основании сделанного ранее замечания для заданной вероятности обнаружения порог λ_0 будет зависеть от стимула s и приращения Δs (11.6). В этом случае величину $\tilde{\lambda}(\lambda_0)$ нельзя использовать в качестве единицы измерения ощущения ΔI , так как, очевидно, единица ощущения должна оставаться постоянной. Поэтому необходимо найти такую функцию

$$\Delta s = f(s), \quad (11.8)$$

для которой порог λ_0 оставался бы неизменным при изменении s . Величина Δs в (11.8) — пороговое значение, обнаруживаемое с вероятностью $p_1 = 1/2$. Иначе говоря, нужно найти такую функцию $f(s)$, для которой порог λ_0 был бы инвариантен к изменению стимула s .

Отыскание функции $f(s)$ является основной задачей шкалирования. Задача эта сложная, так как остается неизвестной функция $\sigma(s)$ в (11.6), характеризующая собственные шумы системы. Более того, остается неизвестной также зависимость $\lambda_0(s, \Delta s)$. Зависимость (11.6) имеет место только для нормальных функций $f(x/s + \Delta s)$ и $f(x/s)$ и поэтому является лишь одной из возможных.

Определение функции $f(s)$ (11.8) из условия инвариантности порога λ_0 отношения правдоподобия к изменению величины стимула s является одной из основных задач психофизики. Она включает в себя выбор функции $\ln[\lambda(x^*)]$, инвариантной по отношению к изменению s , и экспериментальную оценку функции $f(s)$ для реальной нейронной системы. Разумеется, эта задача выходит за рамки теории статистических решений. Интересным примером ее решения является закон Вебера (см. главу 7, § 2). Закон для средних значений интенсивности устанавливает линейную зависимость

$$\Delta s = a(s + s_0), \quad (11.9)$$

где a и s_0 — постоянные величины. В этом случае $\sigma(s)$ есть линейная функция

$$\sigma(s) = a_1(s + s_0).$$

Возвращаясь к рассмотренному примеру (11.6), можно заметить, что порог λ_0 инвариантен к изменению s , если Δs и $\sigma(s)$ линейно зависимы:

$$\Delta s = a\sigma(s). \quad (11.10)$$

За величину ΔI при этом можно принять

$$\Delta I = k [\ln\{\lambda_0\}]^{1/2} = \frac{\Delta s}{\sigma(s)}. \quad (11.11)$$

При условии (11.10) вероятности ложной тревоги и попадания также инвариантны к изменению s . На рабочей характеристике ус-

ловию (11.10) соответствует точка, не меняющая свое положение при изменении s . Значение порога λ_0 в этой точке также не зависит от s .

Пользуясь (11.11), можно построить шкалу с единицей ощущения, равной едва заметному различию (е.з.р.) [12]. Действительно, за величину е. з. р. на основании (11.11) можно принять ощущение ΔI , вызываемое относительным приращением стимула $\Delta s/s$. Любое другое ощущение можно измерить теперь в единицах ΔI . Уравнение (11.11) в следующем параграфе используется для построения логарифмической шкалы.

Для получения зависимости (11.1) следует предположить, что уравнение (11.11) остается справедливым для бесконечно малого приращения ds . Тогда

$$dI = k \frac{ds}{\sigma(s)}. \quad (11.12)$$

Теперь становится ясным переход в (11.11) к функции $[\ln \lambda_0]^{1/2}$. В этом случае уравнение (11.12) легко интегрируется. Если проинтегрировать это дифференциальное уравнение, то получится явная зависимость, выраженная формулой (11.1). Однако для этого должна быть известной функция $\sigma(s)$. При этом особенно важно точно оценить поведение функции $\sigma(s)$ в окрестности точки $s = 0$, так как оно определяет вид шкалы (11.1).

Выбор единицы ощущения в соответствии с (11.11) следует расценивать как один из важных результатов современной психофизики. Как будет показано, на основании (11.11) можно получить различные шкалы, допуская те или иные предположения в отношении функции $\sigma(s)$.

Универсальность соотношения (11.11) связана, по-видимому, с удачным выбором нормальных плотностей вероятности $f(x/s + \Delta s)$ и $f(x/s)$ для аппроксимации функции $\lambda(x)$. Кроме того, было сделано правдоподобное предположение о собственных шумах нейронной системы. Считалось, что в задаче обнаружения приращения Δs сигнала s собственный шум нейронной системы изменяется незначительно, так что имеет место соотношение

$$\sigma(s + \Delta s) \cong \sigma(s).$$

Однако не следует думать, что (11.11) является единственным возможным выражением для порога λ_0 . Более сложный пример получается, если учесть (несмотря на малость Δs) изменение среднеквадратичного значения $\sigma(s)$. В этом случае нормальные апостериорные плотности имеют следующие параметры:

$$m_s = s + \Delta s, \quad \sigma_s = \sigma(s + \Delta s) \quad \text{и} \quad m_n = s, \quad \sigma_n = \sigma(s).$$

Естественно предположить, что $\sigma_s \geq \sigma_n$. Апостериорные плотности вероятности для этого случая изображены на рис. 2.3 (верхний рисунок слева). Тогда, как показано в главе 2, логарифм

отношения правдоподобия должен иметь вид

$$\ln [\lambda(u)] = 1/2\sigma_s^2 (\chi^2 u^2 - (u - \Delta s)^2) - \ln \chi, \quad (11.13)$$

где $\chi = \sigma_s/\sigma_n = \sigma(s + \Delta s)/\sigma(s)$, $u = x - s$.

Отношение правдоподобия $\lambda(x)$ является в этом случае монотонной функцией x (см. рис. 2.2).

Функция $\ln [\lambda(u)]$ удобна при решении некоторых задач, в которых понятие классического порога оказывается неприменимым.

Рассмотрим следующую задачу. Пусть испытуемый должен запомнить сигнал эталонной интенсивности s и определить, является ли предъявляемый ему сигнал $s_1 = s + \Delta s$ эталонным или нет [17]. Эта схема опыта сохраняется для оценки разностного порога Δs . Однако в последнем случае эталонный сигнал s предъявляется каждый раз для сравнения с предъявляемым сигналом s_1 . Для решения подобных задач можно предположить, что принимается решение: «предъявленный сигнал отличен от эталона», если

$$\ln [\lambda(u)] > \ln \lambda_0,$$

где порог $\ln \lambda_0$ определяется допустимой вероятностью ложной тревоги. Квадратное уравнение

$$\ln [\lambda(u)] = \ln \lambda_0 \quad (11.13a)$$

определяет в этом случае два значения стимула u_1, u_2 . Решения относительно гипотез H_1 и H_2 , т. е. «сигнал — не эталон», «сигнал — эталон», принимаются по следующему правилу: если $u_1 \leq x \leq u_2$, то принимается H_1 , если $x < u_1$, $x > u_2$, то принимается H_2 . Рассматриваемому случаю $\sigma_s \geq \sigma_n$ соответствует рис. 2.3 (левый верхний).

Таким образом, для подобного рода задач имеются два критических значения стимула, u_1 и u_2 , и обычное понятие порога неприменимо. В соответствии с двумя значениями u_1 и u_2 имеются два разностных порога для значений стимула $u < 0$ и значений $u > 0$, так как дифференциальная чувствительность системы в точке $x = s$ может быть разной при подходе слева и справа.

Для определения порога $\ln \lambda_0$, инвариантного относительно изменения s , теперь можно воспользоваться рассуждениями, аналогичными используемым для получения выражений (11.6) и (11.11).

Пусть необходимо обнаружить сигнал $s + \Delta s$ с заданными вероятностями попаданий p_1 и ложной тревоги α_0 . Вероятности попадания и ложной тревоги для рассматриваемого случая равны (см. (3.1)):

$$p(S/s) = 1 - \operatorname{erfc}\left(\frac{u_1 - \Delta s}{\sigma_s}\right) + \operatorname{erfc}\left(\frac{u_2 - \Delta s}{\sigma_s}\right),$$

$$p(S/n) = \operatorname{erfc} \frac{u_1}{\sigma_n} - \operatorname{erfc} \frac{u_2}{\sigma_n} \quad (u_1 = x_1^* - s, u_2 = x_2^* - s). \quad (11.14)$$

Следовательно, должны иметь место уравнения

$$p(S/s) = p_1, \quad p(S/n) = \alpha_0.$$

Для определения порога $\ln \lambda_0$ из этих условий следует найти u_1^* и u_2^* , пользуясь (11.14), и затем подставить u_1^* (или u_2^*) в (11.13). Тогда порог $\ln \lambda_0$ будет равен

$$\ln \lambda_0 = \ln [\lambda(u_1^*)] = \Lambda_0(s, \Delta s).$$

Порог $\ln \lambda_0$ является функцией s и Δs . Если подчинить эту функцию условию инвариантности

$$\Lambda_0(s, \Delta s) = \text{const},$$

то получится неявное уравнение, связывающее s и Δs . Важным примером уравнения такого типа является линейная зависимость в законе Вебера (см. § 2 главы 7). При выполнении условия инвариантности порог $\Lambda_0(s, \Delta s)$ не зависит от s и Δs и, следовательно, его можно использовать как единицу ощущения (см. (11.11)).

Однако в явном виде определить функцию $\Lambda_0(s, \Delta s)$ не удастся. Поэтому для решения задачи можно использовать различные приближения. Так, например, можно получить приближенное решение, положив

$$u_1^* = \alpha_1 \sigma_n \text{ и } u_2^* = \alpha_2 \sigma_n,$$

где α_1, α_2 — некоторые постоянные.

Далее, предполагая Δs достаточно малым, можно получить

$$\sigma_s \cong \sigma(s) + \gamma \Delta s = \sigma_n + \gamma \Delta s.$$

Тогда, в соответствии со вторым уравнением (11.14), вероятность α_0 не будет зависеть от s и Δs . Также легко проверить, что вероятность попадания $p(S/s)$ согласно первому уравнению (11.14) не будет зависеть от s и Δs , если выполняется условие $\Delta s/s = \text{const}$. Таким образом, полученная ранее функция вида (11.15) имеет универсальное значение.

На этом заканчивается построение порога $\ln \lambda_0$, инвариантного к изменению s , для случая немонотонной функции $\lambda(u)$.

Приведенные выше выражения для u_1 и u_2 являются условиями независимости порога $\ln \lambda_0$ от стимула s . Легко видеть, что эти условия тождественны условию (11.10), полученному для монотонной функции $\lambda(x)$. Однако порог $\ln \lambda_0$ в (11.13а) отличается от соответствующего порога (11.6) для монотонной функции $\lambda(u)$.

Если считать величину $\Delta s_1/\sigma$ достаточно малой, то, разложив функцию в ряд Тейлора в окрестности точки $\Delta s_1/\sigma = 0$, можно получить выражение вида (11.14). В частности, такое предположение, по-видимому, оправдано в отношении зрения и слуха, для которых дробь Вебера $\Delta s_1/\sigma$ имеет минимальное значение.

Как увидим дальше, метод построения шкалы отношения правдоподобия, в котором используется порог λ_0 , является универсальным: позволяет получить все известные в настоящее время шкалы. В частности, в следующем параграфе строится логарифмическая шкала, а затем степенная шкала.

§ 3. Логарифмическая шкала Фехнера

Для теоретического построения сенсорного пространства Фехнер решил воспользоваться законом Вебера. Чтобы это сделать, нужно было выбрать единицу для измерения ощущений. Фехнеру пришла интересная мысль: принять величину ощущения пропорциональной относительному приращению стимула

$$\Delta I = k \frac{\Delta s}{s}. \quad (11.15)$$

Основанием для такого выбора явился, конечно, закон Вебера, который утверждает, что относительное приращение стимула, обнаруживаемое с одинаковой вероятностью, есть постоянная величина. Далее Фехнер [12] сделал следующий шаг, записав

$$dI = k \frac{ds}{s}. \quad (11.16)$$

В последнем равенстве делается предположение, что закон (11.15) остается справедливым для бесконечно малого приращения ощущения.

Переход от (11.15) к дифференциальной форме (11.16), приводящий к закону Фехнера, наиболее труден для понимания. Действительно, в (11.16) предполагается, что дифференциал ds изменяется независимо от значений переменной величины s . Однако согласно закону Вебера это не так. Дифференциальный порог Δs в (11.15) является функцией s . С другой стороны, дифференциал dI в левой части уравнения (11.16) может быть бесконечно малой величиной, в то время как правая часть уравнения (11.16) согласно закону Вебера не только не является бесконечно малой величиной, но даже возрастает при малых значениях.

Все это показывает, что соотношение (11.15) не является обычным дифференциальным уравнением. Тем не менее Фехнер предположил, что (11.16) есть обычное дифференциальное уравнение первого порядка.

Интегрируя дифференциальное уравнение (11.6), получим

$$I = I_0 + k \ln s.$$

Постоянная I_0 определяется из условия отсутствия ощущения ($I = 0$), когда значение стимула равно величине абсолютного порога $s = s_0$. Используя это условие, получаем

$$I_0 + k \ln s_0 = 0 \quad \text{или} \quad I_0 = -k \ln s_0.$$

Подставляя найденное I_0 в выражение I , получаем

$$I = k \ln \frac{s}{s_0}. \quad (11.17)$$

Это и есть окончательное выражение закона Фехнера: величина ощущения пропорциональна логарифму раздражителя (стимула).

Основу закона Фехнера составляет шкала едва заметных различий е. з. р.¹

Едва заметным различием называется относительное приращение $\Delta s/s$ сигнала s , обнаруживаемое с вероятностью 0,5 или 0,75.* Относительная величина $\Delta s/s$ в соответствии с законом Вебера остается постоянной в пределах всей шкалы значений s . Таким образом, за единицу измерения ощущения принимается величина е. з. р.

Любое ощущение может быть измерено в единицах е. з. р. В этом смысл закона Фехнера. Однако следует иметь в виду, что этот закон обладает одной особенностью, отличающей его от известных физических законов. Закон Фехнера не допускает прямой проверки измерением, так как невозможно измерить величину ощущения. В этом его существенное отличие от закона Вебера, на основании которого он получен.

Рассмотрим теперь вывод закона Фехнера на основании шкалы отношения правдоподобия. Используя (11.12) и предполагая, что среднеквадратичное значение $\sigma(s)$ собственного шума системы есть линейная функция $\sigma(s) = a_1(s + s_0)$, для дифференциала ΔI можно получить соотношение (11.16), следствием которого будет закон Фехнера (11.17). Предположение о линейности функции $\sigma(s)$ есть следствие закона Вебера (см. главу 7, § 2).

При исследовании логарифмической шкалы полезно остановиться на ее практическом значении.

Ее появление имело большое значение для решения различных практических вопросов. Так, инженеры связи начали использовать децибел как единицу относительной интенсивности звуковых сигналов. Один децибел равен $1/10$ логарифмической единицы и приблизительно соответствует разностному порогу. В оптике и фотографии стали использовать фильтры, калиброванные по логарифмической шкале плотности.

Физиологи в своих работах получили подтверждение логарифмической зависимости, используя регистрацию электрических стимулов, в частности частота разряда нейрона является логарифмической функцией величины стимула.

Таким образом, логарифмическая шкала оказалась достаточно универсальной для того, чтобы привлечь к себе большое внимание.

Однако успех логарифмического закона оказался преждевременным. При более тщательном исследовании выяснилось, что логарифмическая шкала оказывается неприменимой в ряде случаев, хотя для некоторых сенсорных пространств, например пространства ощущения высоты (тона), логарифмический закон достаточно точно задает его шкалу.

¹ В английской литературе используется эквивалентное Just-noticeable difference (JND).

§ 4. Степенная шкала Стивенса

Появление логарифмической шкалы, естественно, стимулировало попытки проверить ее экспериментально. Для этого требовались прямые экспериментальные методы для измерения величины ощущения. Как выяснилось, такие методы существовали в психофизике. Так, Боринг [8] указывает, что еще в 1890 г. Меркелем при попытке создать шкалу использовалось удвоение величины ощущения. Однако этот метод остался незамеченным до 1930 г., когда Стивенс [22] указал на возможность применения его для построения уже упомянутой шкалы громкости (шкалы сонов). В дальнейшем он оказался весьма эффективным и стал основным методом построения шкал. Он получил название *метода сенсорных отношений*. Вместо удвоения обычно используется деление величины ощущения пополам или на несколько частей. Так, например, можно проводить эксперименты для выделения $1/3$, $3/4$ от первоначальной величины ощущения.

Рассмотрим, как проводится эксперимент для построения равномерной шкалы громкости. Испытуемому предъявляется звук заданной громкости и его просят регулировать громкость другого звука до тех пор, пока последний не будет иметь громкость, равную половине громкости заданного звука. При этом половинная громкость оценивается испытуемым «субъективно», а регулируется некоторый физический параметр, от которого зависит громкость. Опыт повторяется для всего диапазона громкости.

Такой эксперимент позволяет установить взаимно-однозначное соответствие между отношением двух интенсивностей стимулов и отношением величин соответствующих ощущений.

Так как устанавливается соответствие между отношениями стимулов и ощущений, то единица ощущения не может быть определена в таких экспериментах. Следовательно, найденная сенсорная шкала определена с «точностью до одного параметра» — единицы ощущения. Стивенс, например, при построении шкалы громкости за единицу выбрал громкость 40 дБ и назвал ее *соном*. Точно так же за единицу громкости можно было выбрать величину абсолютного порога или какую-либо другую точку на шкале ощущений. Выбор единицы величины ощущения никак не связан с построением шкалы.

Применяя метод сенсорных отношений к различным модальностям, Стивенс установил зависимость между величиной ощущения и стимулом. Эта зависимость имеет вид степенной функции:

$$I = hs^{\alpha}, \quad (11.18)$$

в которой величина h зависит от выбора единицы ощущения, а показатель α , определяемый по результатам опытов, имеет различную величину для разных модальностей в пределах $\alpha = 0,3 \div 2,0$. Так, например, для громкости он равен $\alpha = 0,3$, для яркости $\alpha = 0,3 \div 0,5$, для тяжести $\alpha = 1,45$, для слуховых биений

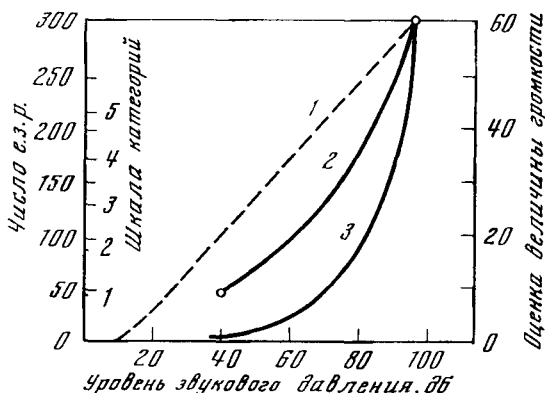
$\alpha = 1,7$ и т. д. Для оценки параметров h и α удобно пользоваться логарифмическими координатами, в которых уравнение (11.18) переходит в уравнение прямой

$$\ln I = \ln h + \alpha \ln s. \quad (11.19)$$

На рис. (11.1,а), в частности, представлена степенная шкала громкости (шкала сонов). Закон был проверен Стивенсом самым тщательным образом для 14 модальностей. Таким образом, прямые измерения величины ощущения привели Стивенса к поразительному результату: вместо логарифмической шкалы получилась степенная. Следовательно, прямые методы измерений величины ощущения не дали логарифмической шкалы, построенной Фехнером.

Р и с. 11.2. Различные шкалы громкости

1 — зависимость громкости (в е.з.р.) от величины уровня звукового давления (в дб) (ось ординат — слева); 2 — категориальная шкала громкости (ось ординат — вторая слева); 3 — зависимость оценки величины громкости от уровня звукового давления (ось ординат — справа)



С открытием степенного закона возникла проблема объяснить расхождение между логарифмической и степенной шкалами.

Тщательность экспериментов не оставляет сомнений в правильности закона (11.18). Однако были предприняты многочисленные исследования для проверки степенной шкалы. Для этого использовались разные способы измерения величины ощущений.

Так, например, существует метод непосредственной оценки испытуемым величины стимула. В одном из опытов Стивенса 70 испытуемых оценивали величины восьми уровней громкости сигналов, представленных в случайном порядке [22]. При этом экспериментатор не приписывал какому-либо уровню громкости определенное число (стандарт). Испытуемый делал это сам и затем располагал остальные уровни громкости в соответствии с выбранным значением.

Результаты опыта показаны на рис. 11.2, где на оси ординат справа — величины ощущений, а по оси абсцисс — уровень звукового давления. Оценки величины громкости приведены к общему уровню 70 дБ, равному громкости сигнала, предъявленного первым. Для построения второй шкалы (кривая 2) использовался метод категорий. Величины ощущений отложены по оси ординат слева. Категориальные шкалы получаются при оценке стимулов

путем распределения их по категориям. Категории обозначаются заранее экспериментатором либо числами, либо прилагательными.

Как видно из рис. 11.2, категориальная кривая 2 также хорошо аппроксимируется степенной функцией. Следует заметить, что хотя обе кривые (2, 3), полученные оценкой стимула и методом категорий, достаточно хорошо описываются степенной функцией, они различаются между собой. Причем эти кривые имеют не только разные h , но также разные показатели степени α (см. (11.18). Для сравнения на рис. 11.2 приведена также прямая 1, определяющая величину ощущения в единицах е. з. р.

Пока рассматривались методы шкалирования стимулов, которые могут быть заданы количественно. К ним принадлежат, например, такие стимулы, как громкость, яркость, вес и др. Стимулы, определенные количественно, отнесены Стивенсом к первому классу. Следует заметить, что к первому классу могут принадлежать значительно более сложные стимулы, чем громкость или вес. Например, к нему могут относиться такие величины, как длительность какого-либо явления или скорость.

Однако существуют стимулы, о которых нельзя сказать «сколько», «как много». По отношению к таким стимулам можно лишь поставить вопросы: «какой», «какого сорта», «какого вкуса». Такие стимулы Стивенс относил ко второму классу.

Для этого класса стимулов им также были предложены методы построения шкал, например метод ранжирования — метод качественного упорядочивания сложных образов, которые не описываются на физическом континууме.

К этому же типу шкал принадлежат упомянутые раньше оценочные шкалы. Для оценочных шкал, разумеется, уже нельзя построить кривые, аналогичные кривым рис. 11.2, так как стимулы в этом случае не определены на физическом континууме.

Рассмотрим связь степенной шкалы (11.18) со шкалой отношения правдоподобия. Степенную шкалу (11.18) можно получить на основании (11.12). Однако вместо линейной следует использовать степенную функцию $\sigma(s)$. Пусть среднеквадратичное значение собственных шумов системы имеет вид

$$\sigma(s) = k_1 s^{1-\alpha}, \quad \alpha \geq 0. \quad (11.20)$$

Тогда на основании (11.12) имеем

$$dI = \frac{k}{k_1} s^{\alpha-1} ds, \quad (11.21)$$

откуда после интегрирования получаем степенную функцию

$$I = h s^{\alpha}, \quad h = k/k_1 \alpha.$$

Таким образом, мы приходим к заключению, что зависимость среднеквадратичного значения шума от величины полезного сигнала s играет существенную роль при построении шкалы. Как следует из формулы (11.20), при $\alpha = 0$ получается логарифмическая шкала, а при $\alpha \neq 0$ — степенная шкала. Теперь можно понять,

в чем может заключаться причина различия логарифмической и степенной шкал. Так как уравнение (11.12) для приращения dI записано для бесконечно малого приращения ds , то существенное значение имеет поведение функции $\sigma(s)$ в окрестности $s = 0$. Это поведение более точно, по-видимому, определяется степенной, а не линейной функцией, как первоначально предполагал Фехнер.

Значение α в (11.18), очевидно, определяется различными факторами, сопровождающими эксперимент, например инструкциями испытуемому, модальностью и т. д. Так при проведении опытов для получения шкалы мелов $\alpha > 0$, а при проведении опытов для получения шкалы деления $\alpha \cong 0$. В опытах по делению на категории значение показателя α получается меньше, чем в опытах по непосредственной оценке величины стимула (см. рис. 11.2).

По-видимому, следует ожидать, что эксперименты на анализаторе одной модальности в разных условиях приведут к различным показателям α . Такое предположение кажется естественным, так как существует неединственный способ решения одной и той же задачи. При этом получаются различные функции $\sigma(s)$, характеризующие собственные шумы нейронной системы.

Сравним теперь полученные шкалы: отношения правдоподобия, логарифмическую и степенную.

Прежде всего следует заметить, что логарифмическая и степенная шкалы могут быть получены из шкалы отношения правдоподобия при соответствующей функции $\sigma(s)$. Для логарифмической шкалы следует использовать линейную функцию $\sigma(s)$, а для степенной — степенную функцию $\sigma(s)$. С точки зрения теории статистических решений степенную и логарифмическую шкалы следует признать эквивалентными, так как функции $1/s$ и $1/s^{1-\alpha}$, очевидно, связаны монотонным преобразованием. Поэтому решения всех задач обнаружения в этих двух сенсорных пространствах оказываются тождественными. Тем не менее «ощущения» одинаковых приращений стимулов различны из-за разных собственных шумов.

Наконец, следует остановиться на одном важном отличии шкалы отношения правдоподобия от логарифмической и степенной шкал. Шкала отношения правдоподобия является наиболее общей шкалой. Действительно, логарифмическая и степенная шкалы задаются монотонно возрастающими функциями стимула. Эта зависимость от величины стимула кажется естественной, так как большим приращениям стимула должны соответствовать большие приращения ощущений. Обе шкалы лишь неравномерно деформируют пространство стимулов.

Однако при решении более сложных задач в пространстве ощущений, по-видимому, можно допустить существование немонотонной зависимости приращения ощущения от приращения стимула.

Такую возможность предоставляет шкала отношения правдоподобия. Но такую зависимость нельзя получить, используя логарифмическую и степенную шкалы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В монографии предлагается статистический подход к некоторым проблемам психофизики. Чтобы оценить его, следует выяснить, что может дать «понятие вероятности» для решения тех или иных проблем психофизики. Понятие «вероятность», несомненно, представляет хорошую основу для различных «теорий порога» и может использоваться в теории измерения. Оно оказалось также существенным для понимания психофизических законов. Так, например, закон Вебера «органически связан» с понятием «вероятность». Понятие «вероятность» необходимо также для описания восприятия слабых сигналов или сигналов, мало отличающихся друг от друга.

Все это позволяет утверждать, что статистический подход оказывается весьма эффективным при решении некоторых психофизических проблем.¹

Однако не следует забывать, что в психофизике существуют проблемы, выходящие за пределы чисто статистического подхода. Они не определяются случайными флуктуациями в нейронных системах. Восприятие сложных сигналов (образов) происходит по вполне детерминированным законам. Здесь понятие «вероятность» может иметь только вспомогательное значение: оно необходимо лишь для распознавания структуры сенсорного пространства на фоне собственных шумов системы. Упомянутый закон Вебера тоже является вполне детерминированным, хотя при его формулировке и используется понятие вероятности.

Из всего изложенного следует, что чисто статистический подход возможен лишь к некоторым проблемам и, несомненно, имеет ограничения. Он должен быть дополнен детерминированными законами, являющимися предельными для статистических законов при малых собственных шумах системы. Такие детерминированные законы, вообще говоря, не связаны с оптимальными статистическими алгоритмами. Поэтому открытие детерминированных законов функционирования нейронных систем составит новую важную главу в психофизике.

ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРИЛОЖЕНИЕ I

НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ [5]

Дискретные случайные величины

Одномерные дискретные величины

Если имеется лишь конечное или счетное множество значений $x_1, x_2, \dots, x_n$, которое случайная величина x может принимать в опыте, то X называется *дискретной случайной величиной*.

Каждому значению x_i приписывается неотрицательное число $p_i = P(X = x_i) \geq 0$ — вероятность значения x_i . Числа p_i исчерпывающим образом характеризуют дискретную случайную величину X . Так как в опыте заведомо наблюдается какое-либо значение x_i , то числа p_i удовлетворяют условию

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1.$$

Иногда для характеристики дискретной случайной величины удобно ввести функцию распределения $F(x)$, определяемую равенством

$$F(x)_i = p_i(X_i \leq x) = \sum_{x_k \leq x} x_k. \quad (I.1)$$

Из определения (I.1) следует, что функция распределения $F(x)$ является неубывающей и стремится к нулю при $x \rightarrow -\infty$ и к единице при $x \rightarrow \infty$. Задание функции $F(x)$ равносильно заданию чисел p_i , так как ее можно вычислить, если известны p_i , и, наоборот, зная $F(x)$, можно определить p_i .

Функции распределения дискретных случайных величин

Равномерное распределение. В этом случае

$$p_i = 1/n \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (I.2)$$

Значения $x_1, x_2, \dots, x_n$ равновероятны.

Биномиальное распределение. Биномиальное распределение используется в следующей схеме опытов. Производится n независи-

мых опытов, в каждом из которых может возникнуть событие A с вероятностью, равной p (схемы Бернулли). Тогда $P_n(m)$ есть вероятность того, что событие A появится m раз. Эта вероятность равна

$$P_n(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}. \quad (I.3)$$

Распределение (I.3) называется *биномиальным распределением*.

Распределение Пуассона. Случайная величина x_i может принимать только целые значения $0, 1, 2, \dots, m$. Вероятность того, что $X = m$, для распределения Пуассона равна

$$p_m = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} \quad (m = 0, 1, 2, \dots). \quad (I.4)$$

Распределению Пуассона подчиняется, например, случайное число телефонных вызовов в заданном интервале времени. При этом λ в (I.4) означает число вызовов в единицу времени.

Двумерные дискретные величины

Если имеется конечное или счетное число пар $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, которые дискретная величина может принимать в опыте, то говорят, что задана двумерная случайная величина (X, Y) . Двумерная величина (X, Y) определяет положение случайной точки на плоскости. Двумерная величина полностью характеризуется заданием вероятностей

$$P(X = x_i, Y = y_j) = p(x_i, y_j) = p_{ij} \quad (I.5)$$

различных значений случайной величины (X, Y) . Вероятности p_{ij} удовлетворяют условиям

$$p_{ij} \geq 0, \quad \sum_{i,j=1} p_{ij} = 1. \quad (I.6)$$

Зная вероятности p_{ij} , можно вычислить вероятность того, что случайная величина (X, Y) принадлежит множеству чисел M :

$$p((X, Y) \in M) = \sum_{x_i, y_j \in M} p_{ij}. \quad (I.7)$$

Так как числа p_{ij} являются исчерпывающей характеристикой двумерной случайной величины, то на основании p_{ij} можно получить вероятности величин X и Y :

$$p_i = \sum_j p_{ij}, \quad p_j = \sum_i p_{ij}.$$

Помимо вероятностей p_{ij} для двумерной случайной величины определяются условные вероятности

$$\begin{aligned} p(X = x_i | Y = y_j) &= p_{ij}/p_j = p(i/j), \\ p(Y = y_j | X = x_i) &= p_{ij}/p_i = p(j/i), \end{aligned} \quad (I.8)$$

равные соответственно вероятности значения $X = x_i$ при условии $Y = y_j$ или вероятности значения $Y = y_j$ при условии $X = x_i$.

Условные вероятности удовлетворяют соотношениям

$$p(i/j) \geq 0, \quad \sum_i p(i/j) = 1. \quad (I.9)$$

Условные вероятности позволяют вычислить условную вероятность попадания точки Y в M_2 :

$$p(Y \in M_2 / X = x_i) = \sum_{y_j \in M_2} p(j/i)$$

или

$$p(X \in M_1 / Y = y_j) = \sum_{x_i \in M_1} p(i/j). \quad (I.10)$$

Подобные выражения использовались в главе 1 для подсчета вероятности ложной тревоги и вероятности попаданий. Случайные величины X и Y называются статистически независимыми, если

$$p_{ij} = p_i \cdot p_j \quad (I.11)$$

или, что равносильно,

$$p(i/j) = p_i, \quad p(j/i) = p_j. \quad (I.12)$$

Функция распределения двумерных дискретных величин

Равномерное распределение. Пусть случайная величина (X, Y) принимает множество значений $\{x_i, y_j\}$ ($i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m$). Тогда (X, Y) распределено равномерно, если

$$p_{ij} = 1/mn. \quad (I.13)$$

Из (I.13) следует, что величины X и Y независимы и распределены равномерно

$$p_i = 1/n = \text{const}, \quad p_j = 1/m = \text{const}.$$

Полиномиальное распределение. Пусть имеется два несовместных события A_1 и A_2 , вероятности которых при отдельном испытании равны соответственно p_1 и p_2 . Если произведено m взаимно независимых испытаний, то вероятность того, что первое событие A_1 наступит n_1 раз, а второе n_2 раз, равна

$$p_m(n_1, n_2) = \frac{m!}{n_1! n_2!} p_1^{n_1} p_2^{n_2}. \quad (I.14)$$

Распределение (I.14) называется *полиномиальным*.

Моменты дискретных величин

Часто для описания случайных величин используются неполные характеристики. Такими характеристиками могут быть математическое ожидание и дисперсия. Математическое ожидание и дисперсия являются моментами первого и второго порядков.

Математическое ожидание случайной величины равно

$$m = M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i. \quad (I.15)$$

Дисперсия случайной величины X равна

$$D = \sigma^2 = \sum_{i=1}^m (x_i - m)^2 p_i, \quad (I.16)$$

где σ — среднее квадратичное значение случайной величины X .

Основные свойства математического ожидания и дисперсии случайной величины X определяются следующими соотношениями:

$$M[a_1 X_1 + a_2 X_2] = a_1 m_1 + a_2 m_2, \quad (I.17)$$

где a_1 и a_2 — произвольные постоянные; m_1, m_2 — математические ожидания величин X_1 и X_2 ;

$$D(a_1 X_1 + a_2 X_2) = a_1^2 D(X_1) + a_2^2 D(X_2) + 2a_1 a_2 k_{12}, \quad (I.18)$$

где $D(X_1), D(X_2)$ — дисперсии величин X_1, X_2 ; $k_{12} = M(X_1 - m)(X_2 - m)$ — корреляционный момент связи величин X_1, X_2 . Если величины X_1 и X_2 некоррелированы, то $k_{12} = 0$ и дисперсия суммы (I.18) принимает вид

$$D(a_1 X_1 + a_2 X_2) = a_1^2 D(X_1) + a_2^2 D(X_2). \quad (I.19)$$

Двумерная случайная величина (X, Y) характеризуется следующими шестью моментами первого и второго порядков: двумя моментами первого порядка

$$M(X) = m_1, \quad M(Y) = m_2$$

и четырьмя моментами второго порядка, составляющими корреляционную матрицу,

$$k = \begin{vmatrix} D_1 & k_{12} \\ k_{21} & D_2 \end{vmatrix}, \quad (I.20)$$

где D_1, D_2 — дисперсии величин X и Y ; $k_{12} = k_{21}$ — корреляционный момент связи величин (X, Y) . Если X и Y некоррелированы, то матрица k является диагональной.

Апостериорные вероятности и наблюдения. Формула Бейсса

Апостериорные условные вероятности $p(i/j)$ и $p(j/i)$ (см. равенства (I.10)) играют важную роль в теории вероятности, так как позволяют учитывать наблюдаемые изменения.

В результате наблюдения в опыте величины y_j , связанной со случайной величиной X , априорные вероятности p_i уточняются и переходят в апостериорные вероятности $p(i/j)$. Этот процесс опи-

сывает влияние наблюдений на распределение вероятностей. Вся информация, таким образом, содержится в апостериорном распределении $p(i/j)$. Если величины X и Y независимы, то наблюдение значений величины Y не дает какой-либо информации о величине X . В этом случае

$$p(i/j) = p_i$$

и, следовательно, не зависит от j .

В теории вероятностей существует соотношение, позволяющее переходить от априорных вероятностей к апостериорным и таким образом учитывать наблюдения. Это соотношение называется *формулой Бейеса*. В основе формулы Бейеса лежит соотношение между апостериорными вероятностями $p(i/j)$ и $p(j/i)$, выражаемое (1.8). Из определения этих вероятностей (1.8) следует

$$p(i/j)p_j = p(j/i)p_i, \quad (1.21)$$

где p_i — вероятности значений случайной величины X ; p_j — вероятности значений случайной величины Y .

Пусть сделано наблюдение какого-либо события A . В частном случае событие A может состоять в наблюдении значения какой-либо случайной величины z . Тогда, если событие A связано с величиной X , вероятность события A можно представить в виде

$$p(A) = \sum_i p_i(A/i) p_i. \quad (1.22)$$

Соотношение (1.22) называется *формулой полной вероятности*. Оно является аналогом определенного интеграла в анализе и позволяет «разложить» вероятность $p(A)$ по вероятностям полной группы несовместных событий. Теперь, воспользовавшись равенством (1.21), имеем

$$p(A/i)p_i = p(i/A)p(A),$$

откуда на основании (1.22) получается формула Бейеса

$$p(i/A) = \frac{p(A/i) p_i}{\sum_i p_i p(A/i)}. \quad (1.23)$$

Она позволяет перейти от априорного распределения p_i величины X к апостериорному распределению $p(i/A)$ и учитывает наблюдение в опыте события A . Как следует из (1.23), для такого перехода необходимо знать «обратные» апостериорные вероятности $p(A/i)$ и априорные вероятности p_i .

Непрерывные случайные величины

Одномерные случайные величины

Случайная величина X называется непрерывной, если непрерывна ее функция распределения $F(x)$ (I.1). При этих условиях существует плотность вероятности $f(x)$

$$f(x) = F'(x). \quad (\text{I.24})$$

В этом случае множеством значений случайной величины может быть, например, отрезок $[0,1]$.

Основные свойства функции распределения непосредственно следуют из ее определения:

$$0 \leq F(x) \leq 1, \quad F(-\infty) = 0, \quad F(\infty) = 1,$$

где $F(x)$ — неубывающая функция x .

Функция распределения $F(x)$ (интегральный закон распределения) величины X равносильна (с точки зрения информации о X) функции плотности вероятности $f(x)$.

Плотность вероятности $f(x)$ может быть определена как вероятность попадания X в бесконечно малый интервал $(x, x + \Delta x)$:

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x \leq X \leq x + \Delta x)}{\Delta x}. \quad (\text{I.25})$$

Основные свойства плотности функции вероятности $f(x)$ следуют непосредственно из ее определения (I.25)

$$f(x) \geq 0, \quad \int f(x) dx = 1.$$

Имея $F(x)$ или $f(x)$, можно вычислить вероятность попадания значений величины X в отрезок $[a, b]$:

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a), \quad (\text{I.26})$$

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx. \quad (\text{I.27})$$

Из (I.26) следует, что если $F(x)$ непрерывна, то вероятность какого-либо определенного значения $X = a$ равна нулю (парадокс нулевой вероятности).

Функции распределения непрерывных случайных величин

Равномерное распределение. Плотность вероятности случайной величины $f(x)$, распределенной равномерно, имеет вид

$$f(x) = 1/(b - a), \quad x \in (a, b), \quad f(x) \equiv 0, \quad x \notin (a, b). \quad (\text{I.28})$$

Плотность вероятности в этом случае остается постоянной в интервале (a, b) .

Нормальное распределение. Плотность вероятности величины X имеет вид

$$f(x) = (2\pi D)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2D}\right] \quad (-\infty < x < \infty), \quad (I.29)$$

где m , D — математическое ожидание и дисперсия величины X соответственно.

Как следует из (I.29), нормальная плотность $f(x)$ определяется двумя параметрами — m , D .

Интегральный закон распределения $F(x)$, (I.29) можно выразить через табулированную функцию $\Phi(x)$ (функцию Лапласа) (таблицы в конце книги):

$$\Phi(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \quad (I.30)$$

Используя (I.30), функцию $F(x)$ можно представить в виде

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right). \quad (I.31)$$

Наряду с функцией Лапласа для вычисления вероятности попадания $p(S/s)$ и вероятности ложной тревоги используется функция

$$\operatorname{erfc} x = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \quad (I.32)$$

Функция $\operatorname{erfc} x$ определяет вероятность попадания X в полубесконечный отрезок

$$p(x \leq X < \infty) = \operatorname{erfc} x.$$

Из (I.30) и (I.32) следует, что между функциями $\Phi(x)$ и $\operatorname{erfc} x$ существуют соотношения

$$\Phi(x) + \operatorname{erfc} x = 1, \quad \operatorname{erfc} x = \Phi(-x). \quad (I.33)$$

Распределение Релея. Плотность вероятности величины X в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned} f(x) &= 2h^2 x e^{-h^2 x^2}, & x &\geq 0, \\ f(x) &\equiv 0, & x &< 0. \end{aligned} \quad (I.34)$$

Релеевскую плотность имеет огибающая детектора при условии действия на его вход одного шума (см. главу 8).

Центрированное χ^2 -распределение. χ^2 -распределение имеет случайная величина X^2 , равная сумме квадратов нормальных случайных величин x_i :

$$X^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \quad (M(x_i) = 0, \quad D(x_i^2) = 1), \quad (I.35)$$

$$p(X^2 \leq \chi^2) = p(\chi^2/n) = [2^{n/2} \Gamma(n/2)]^{-1} \int_0^{\chi^2} t^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{t}{2}} dt, \quad (I.36)$$

где Γ — есть гамма-функция; n — число степеней свободы.

Среднее значение и дисперсия χ^2 -распределения с n степенями свободы равны

$$M(\chi^2/n) = n, \quad D(\chi^2/n) = 2n. \quad (I.37)$$

χ^2 -распределение получается при анализе энергетического детектора (см. главу 10). Ввиду того, что число степеней свободы n обычно достаточно велико, плотность вероятности величины X^2 приближается к нормальной.

Нецентрированное χ^2 -распределение. Интегральный закон $F(\chi'^2)$ в этом случае имеет вид

$$p((\chi')^2/n, \lambda) = \sum_j e^{-\frac{\lambda}{2}} \frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^j}{j} p((\chi')^2/n + 2j), \quad (I.38)$$

где $(\chi')^2$ — нецентрированная случайная величина; n — число степеней свободы; λ — параметр распределения.

Как следует из (I.38), нецентрированное $(\chi')^2$ -распределение является суммой центрированных χ^2 -распределений с весами

$$e^{-\frac{\lambda}{2}} \frac{(\lambda/2)^j}{j}.$$

Весами являются распределения Пуассона с математическим ожиданием $\lambda/2$.

Нецентрированное χ^2 -распределение имеет случайная величина

$$Y = \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + (x_n + \sqrt{\lambda})^2, \quad (I.39)$$

где x_i — независимые нормальные величины с математическими ожиданиями и дисперсиями, равными $M(x_i) = 0$, $D(x_i) = 1$; λ — некоторый параметр.

Среднее значение и дисперсия $(\chi')^2$ -распределения равны

$$M(\chi')^2 = n + \lambda, \quad D(\chi')^2 = 2n + 4\lambda. \quad (I.40)$$

Нецентрированное $(\chi')^2$ -распределение использовалось в главе 9 для анализа энергетического детектора.

Случайные векторы

Двумерный случайный вектор $\mathbf{z}(X, Y)$ определяет положение случайной точки на плоскости. Исчерпывающими вероятностными характеристиками вектора $\mathbf{z}$ являются функция распределения $F(x, y)$ и плотность вероятности $f(x, y)$. Функция распределения

$F(x, y)$ равна вероятности

$$F(x, y) = P\left(\begin{matrix} X \leq x \\ Y \leq y \end{matrix}\right). \quad (I.41)$$

На основании (I.41) можно установить основные свойства функции

$$\begin{aligned} 0 &\leq F(x, y) \leq 1, \\ F(-\infty, y) &= F(x, -\infty) = F(-\infty, -\infty) = 0, \\ F(x, \infty) &= F_1(x), \quad F(\infty, y) = F_2(y), \quad F(\infty, \infty) = 1, \end{aligned} \quad (I.42)$$

где $F_1(x)$ — функция распределения величины X ; $F_2(y)$ — функция распределения величины Y .

Для непрерывного случайного вектора функция $F(x, y)$ непрерывна и существует плотность

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \cdot \partial y}. \quad (I.43)$$

Плотность вероятности $f(x, y)$ может быть также определена как вероятность события

$$f(x, y) = \lim_{\Delta x \cdot \Delta y} \frac{P\left(\begin{matrix} x \leq X \leq x + \Delta x \\ y \leq Y \leq y + \Delta y \end{matrix}\right)}{\Delta x \cdot \Delta y}. \quad (I.44)$$

Из определения плотности $f(x, y)$ (I.44) следуют основные ее свойства

$$f(x, y) \geq 0, \quad \int f(x, y) dx dy = 1. \quad (I.45)$$

Зная плотность вероятности $f(x, y)$, можно получить плотности вероятности его компонент:

$$f_1(x) = \int f(x, y) dy, \quad f_2(y) = \int f(x, y) dx, \quad (I.46)$$

а также можно вычислить вероятность попадания случайной точки $Z(X, Y)$ в область B плоскости

$$P(z \in B) = \iint_B f(x, y) dx dy. \quad (I.47)$$

В частности, интегральный закон распределения $F(x, y)$ равен вероятности попадания точки $Z(X, Y)$ в бесконечный квадрант

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv. \quad (I.48)$$

Аналогично двумерному случайному вектору $Z(X, Y)$ рассматривается многомерный вектор $X(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Исчерпываю-

щими характеристиками вектора $\mathbf{X}$ являются функция распределения

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

и плотность вероятности

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Все определения и свойства функции распределения $F(x, y)$ и плотности вероятности $f(x, y)$ двумерного вектора распространяются на функцию распределения и плотность вероятности вектора $\mathbf{X}(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Функции распределения случайного вектора

Равномерное распределение. Плотность вероятности равномерно распределенного вектора $\mathbf{Z}(X, Y)$ в прямоугольнике $x \in (a, b)$, $y \in (c, d)$ равна

$$f(x, y) = \frac{1}{(b-a)(d-c)}, \quad x \in (a, b), \quad y \in (c, d). \quad (\text{I.49})$$

Из (I.49) следует, что случайные величины X и Y независимы. Следовательно, равномерно распределенный в прямоугольнике вектор $\mathbf{Z}$ имеет независимые компоненты.

Нормальное распределение двумерного вектора. Вектор $\mathbf{Z}(X, Y)$ в этом случае имеет плотность

$$f(x, y) = (2\pi\Delta)^{-1} \exp \times \\ \times \left[-\frac{DY(x - m_X)^2 - 2k_{XY}(x - m_X)(y - m_Y) + DX(y - m_Y)^2}{2\Delta^2} \right], \quad (\text{I.50})$$

где $\Delta^2 = D_X D_Y - k_{XY}^2$; m_X, m_Y — математические ожидания величин X и Y ; D_X, D_Y — дисперсии величин X, Y ; k_{XY} — корреляционный момент связи величин X и Y .

Из (I.50) следует, что некоррелированные нормальные величины $k_{XY} = 0$ независимы. В этом случае

$$f(x, y) = f_1(x)f_2(y),$$

где $f_1(x)$ и $f_2(y)$ — нормальные плотности величин X и Y .

Нормальное распределение вектора $\mathbf{X}$. Нормальный вектор $\mathbf{X}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ имеет плотность вероятности

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = ((2\pi)^n |k|)^{-\frac{1}{2}} \exp \times \\ \times \left\{ -\frac{1}{2|k|} \sum_{p, q=1}^n k_{pq}(x_p - m_p)(x_q - m_q) \right\}, \quad (\text{I.51})$$

где $|k|$ — определитель корреляционной матрицы вектора; K_{pq} — алгебраическое дополнение элемента k_{pq} в определителе $|k|$; m ($m_1, m_2, \dots, m_n$) — вектор математического ожидания.

Компоненты нормального вектора распределены нормально с параметрами $m_1, m_2, \dots, m_n$; $D_1, D_2, \dots, D_n$.

Апостериорные плотности вероятности случайного вектора. Формула Бейеса

Если известно, что в результате опыта случайная величина X приняла значение x , то следует рассмотреть апостериорную (условную) плотность вероятности

$$f(y/X = x) = f(y/x) \quad (I.52)$$

или, если $Y = y$,

$$f(x/Y = y) = f(x/y). \quad (I.53)$$

Для апостериорных плотностей вероятности имеют место соотношения

$$f(x, y) = f(x/y) \cdot f_2(y) = f(y/x) \cdot f_1(x). \quad (I.54)$$

Случайные величины X и Y называются независимыми, если выполняются условия

$$f(x/y) = f_1(x), \quad f(y/x) = f_2(y), \quad (I.55)$$

причем выполнение одного из этих равенств влечет выполнение другого. Из (I.54) и (I.55) следует, что для независимых случайных величин

$$f(x, y) = f_1(x) f_2(y). \quad (I.56)$$

Для непрерывного случайного вектора можно записать формулу Бейеса, которая в этом случае имеет вид

$$f(x/y) = \frac{f(y/x) f_1(x)}{\int f(y/x) f_1(x) dx}. \quad (I.57)$$

Моменты непрерывных случайных величин

Если распределение $F(x)$ случайной величины X неизвестно, то для ее описания можно использовать неполные характеристики — *моменты случайной величины*. Двумя первыми моментами являются математическое ожидание m и дисперсия D случайной величины X . Они определяются следующим образом:

$$m = \int x f(x) dx, \quad D = \int (x - m)^2 f(x) dx. \quad (I.58)$$

Из определения (I.58) следуют основные свойства математического ожидания и дисперсии:

$$M_1(a_1 X_1 + a_2 X_2) = a_1 m_1 + a_2 m_2,$$

$$D(a_1 X_1 + a_2 X_2) = a_1^2 D_1 + a_2^2 D_2 + 2k_{12},$$

где a_1, a_2 — произвольные постоянные; m_1, m_2 — математические ожидания случайных величин X_1 и X_2 ; D_1, D_2 — дисперсии величин X_1, X_2 ; k_{12} — корреляционный момент связи величин X_1, X_2 .

Двумерный случайный вектор $Z(X, Y)$ характеризуется шестью моментами первого и второго порядков: двумя моментами первого порядка (математические ожидания компонент)

$$M(X) = m_x; \quad M(Y) = m_y$$

и четырьмя моментами второго порядка, составляющими корреляционную матрицу k вектора Z :

$$k = \begin{vmatrix} D_x & k_{xy} \\ k_{xy} & D_y \end{vmatrix}.$$

Случайный вектор $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ характеризуется $n^2 + n$ моментами первого и второго порядков: вектором математических ожиданий

$$m(m_1, m_2, \dots, m_n), \quad m_n = M(x_n),$$

и корреляционной матрицей $k(n \times n)$ вектора X

$$k = \|k_{ij}\|,$$

где k_{ij} — корреляционный момент связи величин X_i и X_j .

Функции случайных величин

Случайные величины X и Y могут быть связаны между собой функциональной зависимостью

$$Y = \varphi(X), \tag{I.59}$$

где $\varphi(X)$ — заданная неслучайная функция.

Тогда, если $f(x)$ и $g(y)$ — плотности вероятности величин X и Y , то вероятности попадания величин X и Y в бесконечно малые интервалы $(x, x + \Delta x)$, $(y, y + \Delta y)$ равны:

$$\begin{aligned} p(x \leq X \leq x + \Delta x) &= f(x) dx, \\ p(y \leq Y \leq y + \Delta y) &= g(y) dy. \end{aligned} \tag{I.60}$$

Так как между X и Y существует функциональная связь, то вероятности должны быть равны

$$f(x) dx = g(y) dy. \tag{I.61}$$

Соотношение (I.61) использовалось в главе 5.

Стационарные случайные процессы

Случайный процесс $X(t)$ можно определить как случайную величину, зависящую от параметра t . Наблюдаемыми в опыте «значениями» случайной функции $X(t)$ являются функции време-

ни $x(t)$. Они называются *выборочными функциями* или *реализациями процесса* $X(t)$.

Случайный процесс описывается функциями плотности вероятности (функциями распределения).

Одномерная функция распределения случайного процесса определяется равенством

$$F(x, t) = P[X(t) \leq x]. \quad (I.62)$$

Одномерная функция распределения случайного процесса есть закон распределения случайной величины $X(t)$, зависящей от параметра t , и, следовательно, функцией x и t .

Двумерная функция распределения случайного процесса определяется условием

$$F(x_1, x_2, t_1, t_2) = P \left[\begin{matrix} X(t_1) \leq x_1 \\ X(t_2) \leq x_2 \end{matrix} \right] \quad (I.63)$$

и является законом распределения двумерного вектора (X_1, X_2) , где $X_1 = X(t_1)$, $X_2 = X(t_2)$.

n -мерная функция распределения случайного процесса есть функция распределения n -мерного вектора $\mathbf{X}(X_1, X_2, \dots, X_n)$, где $X_1 = X(t_1)$, $X_2 = X(t_2)$, $\dots$, $X_n = X(t_n)$. Она имеет вид

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) \quad (I.64)$$

и зависит от моментов времени $t_1, t_2, \dots, t_n$.

Для полной характеристики случайного процесса функции распределения F должны быть известны для любого n . Наряду с функциями распределения можно пользоваться функциями плотности вероятности. n -мерная плотность вероятности $f(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = f(\mathbf{x}, \mathbf{t})$ зависит от величин $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и моментов времени $t_1, t_2, \dots, t_n$.

Функции распределения и функции плотности вероятности являются равноценными характеристиками случайного процесса, так как связаны между собой соотношением

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \frac{\partial^{(n)} F(\mathbf{x}, \mathbf{t})}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n}. \quad (I.65)$$

Часто функции распределения случайного процесса не известны. Тогда для его частичного описания можно использовать два первых момента — математическое ожидание и корреляционную функцию. Математическое ожидание и корреляционная функция процесса определяются следующими равенствами:

$$M[X(t)] = m(t),$$

$$k(t_1, t_2) = M[\{X(t_1) - m(t_1)\} \times \{X(t_2) - m(t_2)\}]. \quad (I.66)$$

Математическое ожидание зависит от времени. Корреляционная функция процесса зависит от двух моментов времени t_1, t_2 и является корреляционным моментом связи величин $X(t_1)$ и $X(t_2)$.

Как следует из определения (I.66), математическое ожидание имеет обычные свойства математического ожидания случайной величины. Корреляционная функция процесса в соответствии с (I.66) обладает следующими свойствами:

$$k(t_1, t_2) = k(t_2, t_1), \quad k(t, t) = D(t),$$

$$|k(t_1, t_2)| \leq \sqrt{D(t_1) D(t_2)},$$

где $D(t)$ — дисперсия процесса, зависящая от времени.

Дальше мы ограничимся рассмотрением *стационарных процессов*. Стационарным (в широком смысле) называется случайный процесс, удовлетворяющий следующим условиям:

$$m(t) = m = \text{const}, \quad k(t_1, t_2) = k(t_1 - t_2) = k(\tau). \quad (\text{I.68})$$

Согласно (I.68) математическое ожидание стационарного процесса не зависит от времени, а его корреляционная функция зависит только от разности $\tau = t_1 - t_2$, а не от абсолютных моментов времени t_1, t_2 .

Одно из основных положений теории стационарных случайных процессов (теорема Бохнера) касается представления корреляционной функции вида

$$k(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} dF(\omega), \quad (\text{I.69})$$

где $F(\omega)$ — интегральный спектр процесса.

Спектр $F(\omega)$ обладает свойствами функции распределения. Если $F(\omega)$ — дифференцируемая функция, то

$$F'(\omega) = f(\omega). \quad (\text{I.70})$$

Функция $f(\omega)$ называется *спектральной плотностью процесса*.

В соответствии с (I.69) корреляционная функция и спектральная плотность связаны преобразованием Фурье

$$k(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} f(\omega) d\omega, \quad f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} k(\tau) d\tau. \quad (\text{I.71})$$

Из (I.69) следует существование (в среднем квадратичном) стохастического интеграла

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dZ(\omega), \quad (\text{I.72})$$

который дает гармоническое разложение процесса $X(t)$ на гармоники

$$dZ(\omega) e^{i\omega t} \quad (\text{I.73})$$

со случайными амплитудами.

Как это следует из (I.69), $Z(\omega)$ является случайным процессом с некоррелированными (ортогональными) приращениями. Так что приращения $\Delta Z(\omega)$ и $\Delta' Z(\omega)$, относящиеся к непересекающимся интервалам, некоррелированы. Интегральный спектр процесса $F(\omega)$ определяется соотношением

$$dF(\omega) = M |dZ(\omega)|^2. \quad (I.74)$$

Из первой формулы (I.71) следует

$$D = k(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) d\omega. \quad (I.75)$$

В сочетании с (I.73) и (I.74) это означает, что в случае непрерывной спектральной плотности дисперсия процесса равна сумме (интеграл I.75) дисперсий отдельных колебаний вида (I.73). При этом дисперсия отдельного колебания бесконечно мала.

Иногда используют следующую физическую интерпретацию этого факта.

Если $X(t)$ — ток, текущий по единичному сопротивлению, то дисперсия D есть средняя мощность, рассеиваемая на сопротивлении. Тогда согласно (I.75) средняя мощность тока, рассеиваемая на сопротивлении, равна сумме средних мощностей отдельных гармоник (I.73).

В книге используются стационарные процессы частного вида: белый шум с неограниченной полосой частот и белый шум в полосе частот $(-\omega_c, \omega_c)$.

Корреляционная функция белого шума с неограниченной полосой частот есть δ -функция Дирака

$$k(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau), \quad (I.76)$$

где $N_0/2$ — спектральная плотность шума.

Дисперсия белого шума с неограниченной полосой частот, как показывает формула (I.75), бесконечно велика. Белый шум в полосе частот $(-\omega_c, \omega_c)$, $\omega_c = 2\pi f_c$, имеет спектральную плотность

$$\Phi(\omega) = N_0/2, \quad \omega \in (-\omega_c, \omega_c), \quad \Phi(\omega) \equiv 0, \quad \omega \notin (-\omega_c, \omega_c). \quad (I.77)$$

Корреляционная функция в соответствии с (I.71) равна

$$k(\tau) = \frac{N_0}{2\pi} \cdot \frac{\sin \omega_c \tau}{\tau} = D \frac{\sin 2\pi \omega_c \tau}{2\pi \omega_c \tau}, \quad (I.78)$$

где $D = N_0 \omega_c$ — дисперсия шума.

ПРИЛОЖЕНИЕ II

ВЫВОД БЕЙЕСОВСКОГО ОПТИМАЛЬНОГО ПРАВИЛА [6]

В приложении дается вывод бейесовского оптимального решающего правила (3.7) и полученный результат распространяется на сложные гипотезы.

Согласно критерию требуется, чтобы средний риск R (3.6) был минимален.

Рассмотрим, к какому оптимальному правилу приведет это требование. Вначале следует выяснить, в зависимости от какой величины следует искать минимум R . Для этого можно воспользоваться выражениями вероятностей α и β (2.2), (2.3) и представить средний риск R в виде

$$R = q_1 c_{11} + q_2 c_{22} + q_1 c_\alpha \int_{\Gamma_2} f(x/h_1) dx + q_2 c_\beta \int_{\Gamma_1} f(x/h_2) dx. \quad (\text{II.1})$$

Учитывая условие нормировки

$$\int_{\Gamma_1} f(x/h_1) dx + \int_{\Gamma_2} f(x/h_1) dx = \int_{\Gamma} f(x/h_1) dx = 1, \quad (\text{II.2})$$

средний риск можно представить в виде

$$R = q_1 c_{11} + q_2 c_{22} + q_1 c_\alpha + \int_{\Gamma_1} [q_2 c_\beta f(x/h_2) - q_1 c_\alpha f(x/h_1)] dx. \quad (\text{II.3})$$

Из (II.3) можно заметить, что единственной величиной, подлежащей выбору, является область Γ_1 . Все остальные данные заданы условиями задачи. Следовательно, минимум среднего риска достигается выбором области Γ_1 . Можно записать для минимального бейесовского риска

$$R_{\min} = \min_{\Gamma_1} R. \quad (\text{II.4})$$

Из (II.3) можно сразу получить оптимальное бейесово правило. Так как член вне интеграла не зависит от выбора Γ_1 , то он не влияет на отыскание минимума. Интеграл достигает минимума, когда подынтегральное выражение отрицательно. Так как все величины и функции положительны, то для этого необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$q_1 c_\alpha f(x/h_1) > q_2 c_\beta f(x/h_2). \quad (\text{II.5})$$

Таким образом, область Γ_1 в K -мерном пространстве определяется условием

$$\lambda(x) \leq \lambda_0, \quad (\text{II.6})$$

где

$$\lambda(x) = \frac{f(x/h_2)}{f(x/h_1)} - \text{отношение правдоподобия};$$

$$\lambda_0 = \frac{q_1 c_\alpha}{q_2 c_\beta} - \text{порог}. \quad (\text{II.7})$$

Область Γ_2 определяется условием

$$\lambda(x) > \lambda_0, \quad (\text{II.8})$$

в чем можно убедиться, если воспользоваться условием нормировки (II.2), выразить из него $\int_{\Gamma_1} \dots dx$ и подставить его в выражение для R . Таким образом, байесовское оптимальное правило совпадает с ранее введенным решающим правилом: оно также приводит к сравнению отношения правдоподобия $\lambda(x)$ с порогом.

Часто случается, что одна или обе функции $f(x/s)$ и $f(x/n)$ зависят от некоторых параметров $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$, значения которых не известны экспериментатору. Например, плотность вероятности

$$f(x/s) = (2\pi D)^{-\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{(x-m)^2}{2D} \right],$$

в которой математическое ожидание m или дисперсия D не известны, может служить примером такой функции. Задача отыскания оптимальной стратегии в этом случае, естественно, усложняется. Однако, как показано ниже, она также сводится к правилу отношения правдоподобия, хотя и более сложному.

Далее рассматривается случай, когда функция $f(x/s)$ зависит от m параметров $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$, а функция $f(x/n)$ от θ не зависит. В этом случае гипотеза N называется *простой*, а гипотеза S — *сложной*. Если параметры $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$ рассматриваются как случайные величины, то считается заданной совместная условная плотность вероятности $f(x, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m/s) = f(x, \theta/s)$. В общем случае считаются известными апостериорные плотности $f(x/n)$, $f(x, \theta/s)$, априорные вероятности появления сигнала q_1, q_2 и цены за правильные и неправильные решения.

Вся эта исходная информация является такой же, как при решении байесовской задачи. Дополнительно считается известной совместная плотность вероятности параметров θ : $z(\theta) = z(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$.

Средний байесовский риск запишется в этом случае в виде

$$R^* = q_1 \left[c_{11} \int_{\Gamma_1} f(x/n) dx + c_{21} \int_{\Gamma_2} f(x/n) dx \right] + q_2 \left[\int_{\Gamma_1} dx \int c_{12}(\theta) f(x, \theta/s) z(\theta) d\theta + \int_{\Gamma_2} dx \int c_{22}(\theta) f(x, \theta/s) z(\theta) d\theta \right],$$

где $d\theta = d\theta_1, d\theta_2, \dots, d\theta_m$.

В первых квадратных скобках содержится величина риска, связанного с гипотезой H_1 . Во вторых квадратных скобках содержится величина риска, связанного с гипотезой H_2 . Таким образом, средний байесовский риск для сложной гипотезы получается дополнительным осреднением с плотностью $z(\theta)$.

Для того чтобы минимизировать риск R^* , необходимо так же, как в случае (3.6), выбрать области Γ_1 и Γ_2 . Действуя аналогично (II.1), (II.3), получаем следующее решающее правило:

$$\lambda_c(x) \geq 1, \quad (\text{II.9})$$

где отношение правдоподобия λ_c для сложной гипотезы имеет вид

$$\lambda_c(x) = \frac{(1 - q_1) \int [c_{12}(\theta) - c_{22}(\theta)] f(x, \theta/s) z(\theta) d\theta}{q_1(c_{21} - c_{11}) f(x/n)}. \quad (\text{II.10})$$

Таким образом, в случае одной сложной гипотезы отношение правдоподобия λ_c приобретает вид (II.10), в то время как порог $\lambda_0 = 1$.

Нетрудно получить также оптимальное решающее правило, когда гипотеза N также является сложной.

Если цены c_{12} и c_{22} не зависят от параметров θ , решающее правило (II.9) можно записать в более обычном виде

$$\lambda_c(x) \geq \lambda_0,$$

где

$$\lambda_c(x) = \frac{\int f(x, \theta/s) z(\theta) d\theta}{f(x/n)}; \quad \lambda_0 = \frac{q_1(c_{21} - c_{11})}{q_2(c_{12} - c_{22})} = \frac{q_1 c_\alpha}{q_2 c_\beta}. \quad (\text{II.11})$$

Формула (II.11) может использоваться для анализа оптимального детектора огибающей (см. главу 8). В этом случае сигнал $s(t)$ зависит от случайной фазы

$$s(t, \theta) = A \cos(\omega t - \theta),$$

и плотность $z(\theta)$ равна

$$z(\theta) = 1/2\pi \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi).$$

Так как легко заметить, что в нашем случае

$$f(x, \theta/s) = f[x - s(\theta)/n],$$

то для получения числителя в (II.11) необходимо предварительно вычислить интеграл

$$\int_0^{2\pi} f[x - s(\theta)/n] z(\theta) d\theta.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ III

СЛОЖНЫЕ И МНОГОАЛЬТЕРНАТИВНЫЕ ГИПОТЕЗЫ [16]

В приложении решающее правило, использующее отношение правдоподобия, распространяется на минимаксный критерий, последовательный анализ, а также на сложные и многоальтернативные гипотезы.

Минимаксный критерий

В некоторых задачах априорные вероятности $q_1, q_2 = 1 - q_1$ состояний h_1 и h_2 неизвестны. В этом случае в байесовской оптимальной стратегии нельзя определить порог λ_0 (3.8) и, следовательно, нельзя получить оптимальное решение. Выход из этого затруднения можно найти, если изменить критерий так, чтобы не

требовалось знания априорной вероятности q_1 . Это можно сделать, если использовать минимаксный критерий. В соответствии с этим критерием необходимо, чтобы байесовский средний риск (3.6) был минимален. При этом вероятность q_1 выбирается из условия максимума R . Таким образом, минимаксный критерий имеет вид

$$\min_{\Gamma_1} \max_{q_1} R,$$

где R вначале максимизируется по q_1 , а затем минимизируется по области Γ_1 . Таким образом, наилучшее решение ищется в наихудшей возможной ситуации.

Если бы вероятность q_1 была из-

вестна, то, используя байесовскую минимальную стратегию, можно было бы получить минимальный средний риск $R_{\min}(q_1)$. График $R_{\min}(q_1)$ имеет вид, показанный на рис. III.1. Если используется байесовское решение для значения вероятности q_1 , а в действительности вероятность гипотезы h_1 равна q_1^* , то средний риск при принятии решения оказывается равным

$$R^* = q_1^* (c_{11} + c_{\alpha}\alpha) + (1 - q_1^*)(c_{22} + c_{\beta}\beta).$$

При этом вероятности ошибок первого и второго родов $\alpha(q_1)$, $\beta(q_1)$ зависят от значения априорной вероятности q_1 , использованной в решении. Уравнение $R^*(q_1^*)$ определяет прямую линию, касающуюся кривой минимального байесовского риска в точке $q_1 = q_1^*$ (рис. III.1).

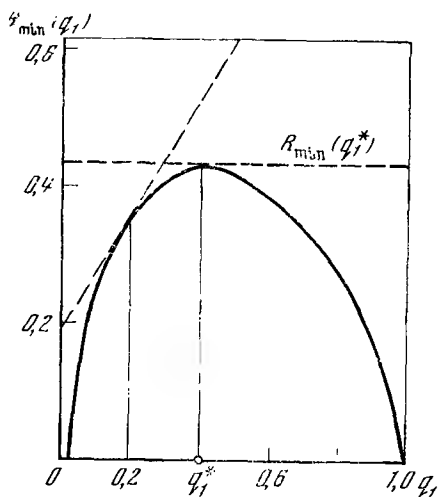


Рис. III.1. Минимаксный критерий

Таким образом, если просто использовать байесовскую стратегию, потери R^* могут быть очень велики (рис. III.1). Величину потерь R^* можно уменьшить, если использовать байесовское решение для значения q_1^* , соответствующее максимальному байесовскому риску $R_{\max}^*$. В этом случае потери не будут превышать $R_{\min}^*(q_1^*)$ (рис. III.1).

Рассмотрение минимаксного критерия позволяет установить, что в этом случае также используется решающее правило (3.7) (с последующим определением неизвестной вероятности из условия максимума риска). Дифференцируя средний риск (3.6) R^* по q_1^* , получаем условие максимума

$$\partial R^* / \partial q_1^* = (c_{11} + c_{\alpha}\alpha) - (c_{22} + c_{\beta}\beta) = 0.$$

Так как $c_{11} + c_{\alpha}\alpha$ и $c_{22} + c_{\beta}\beta$ есть риски, соответствующие гипотезам H_1 и H_2 , то отсюда можно заключить, что минимаксное решение является байесовским решением, для которого риски, соответствующие гипотезам, равны.

Последовательный анализ

При применении байесовского критерия объем наблюдений статистики считается фиксированным. Например, можно считать, что для принятия решения сделано n независимых наблюдений $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Другая возможность состоит в том, чтобы задать вероятности α и β и построить опыт так, чтобы α и β достигались при минимальном среднем числе наблюдений. Эта процедура называется последовательным анализом. Вначале наблюдается x_1 и на основании решающего правила (3.7) принимается одна из трех альтернатив:

если $\lambda_1(x) \rightarrow B$, принимается гипотеза H_1 и испытания прекращаются;

если $\lambda_1(x) > A$, принимается гипотеза H_2 и испытания прекращаются;

если $B < \lambda_1(x) \leq A$, то делается второе измерение, вычисляется новая функция правдоподобия $\lambda_2(x_1, x_2)$ и сравнивается с порогом A и B . После n измерений коэффициент правдоподобия имеет вид

$$\lambda_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_n / h_2)}{f(x_1, x_2, \dots, x_n / h_1)}. \quad (\text{III.1})$$

Затем используется следующее решающее правило:

если $\lambda_n < B$, выбирается гипотеза H_1 ;

если $\lambda_n > A$, выбирается гипотеза H_2 ;

если $B < \lambda_n < A$, делается $n + 1$ измерение.

Пороги A и B выбираются из условий заданных вероятностей α и β . Можно показать (Вальд), что A и B подчиняются следующим

неравенствам:

$$A \leq (1 - \beta)/\alpha, \quad B \geq \beta/(1 - \alpha).$$

Последовательный анализ для достижения заданных значений α и β иногда позволяет выполнить меньшее число опытов по сравнению с числом опытов при фиксированной выборке. Из описания последовательного решения видно, что на каждом шаге для принятия решения также используется решающее правило (3.7).

До сих пор рассматривались простые гипотезы. Важно знать, сохранится ли правило отношения правдоподобия в случае сложных гипотез? Оказывается, для сложных гипотез правило отношения правдоподобия также имеет место. Сложные гипотезы являются утверждениями типа $h_1 \in \Omega_1$ или $h_2 \in \Omega_2$, где Ω_1 и Ω_2 — некоторые множества состояний природы. Как уже указывалось, в этом случае утверждения не содержат точного перечня всех состояний, так как они определяются условиями $h_1 \in \Omega_1$ или $h_2 \in \Omega_2$. Следовательно, должны быть заданы $q_1 = p(h_1 \in \Omega_1)$ и $q_2 = 1 - q_1$.

Оказывается, оптимальное решающее правило байесовской стратегии совпадает с правилом (3.7), но апостериорные плотности вероятности $f(x/h_1)$, $f(x/h_2)$ следует заменить апостериорными плотностями вероятности $f(x/\Omega_1)$, $f(x/\Omega_2)$. Байесовская стратегия в случае проверки m -альтернативной гипотезы также при некоторых ограничениях приводит к правилу отношения правдоподобия.

Пусть имеется m -альтернативная гипотеза. Тогда область Γ состоит из m непересекающихся областей

$$\Gamma = \sum_{k=1}^m \Gamma_k.$$

Байесовское оптимальное правило дает возможность определить такую область Γ_i , что если $X \in \Gamma_i$, то принимается H_i .

Пусть c_{ij} — есть цена за неправильное решение i , когда природа находится в состоянии j .

Если повторить рассуждения для двух гипотез, касающиеся минимизации среднего риска, то можно прийти к следующему решающему правилу. Решение делается в пользу H_i , если неравенство

$$\sum_{j=1}^m q_j c_{ij} f(x/H_j) < \sum_{j=1}^m q_j c_{lj} f(x/H_j) \quad (\text{III.2})$$

сохраняется для любого $l \neq j$.

На основании формулы Байеса неравенство (III.2) равносильно неравенству

$$\sum_{j=1}^m c_{ij} f(H_j/x) < \sum_{j=1}^m c_{lj} f(H_j/x), \quad (i \neq l). \quad (\text{III.3})$$

Из (III.3) следует, что гипотеза H_i принимается в том случае, когда средний условный риск

$$\sum_{j=1}^m c_{ij} f(H_j/x),$$

связанный с принятием гипотезы H_i , оказывается меньше, чем средний условный риск

$$\sum_{j=1}^m c_{lj} f(H_j/x), \quad l \neq i,$$

связанный с принятием любой другой гипотезы H_l , отличной от H_i . Таким образом, здесь обобщается правило минимума среднего условного риска, установленное для двух гипотез.

Рассмотрим частный случай, когда цены выбираются следующим образом:

$$c_{ij} = \begin{cases} 0, & i = j, \\ 1, & i \neq j. \end{cases}$$

Тогда неравенство (III.3) заменяется неравенством

$$f(H_i/x) > f(H_l/x)$$

или

$$\frac{q_i f(x/H_i)}{q_l f(x/H_l)} > 1,$$

которое должно выполняться для всех $l \neq j$. Следовательно, в случае m -альтернатив делается решение в пользу гипотезы H_i , если

$$q_i f(x/H_i) = \max_l q_l f(x/H_l), \quad (l = 1, 2, \dots, m).$$

В случае одинаковых цен $c_\alpha = c_\beta$, применяя формулу Бейеса, можно получить

$$\frac{q_j f(x/h_j)}{q_l f(x/h_l)} = \frac{f(h_j/x)}{f(h_l/x)} > 1.$$

Таким образом, решение принимается в пользу гипотезы, имеющей большую апостериорную вероятность. При этом в случае одинаковых цен байесовская стратегия совпадает со стратегией отношения правдоподобия.

Окончательно мы приходим к следующему важному выводу.

В теории принятия решений существует универсальное правило для принятия решения. Это — правило сравнения отношения правдоподобия $\lambda(x)$ с порогом. Правило охватывает все рассмотренные оптимальные стратегии для проверки простых и сложных гипотез. Различие между этими случаями определяется лишь выбором порогов λ_0 в зависимости от принятого критерия.

Как было показано в главе 1, правило отношения правдоподобия эквивалентно пороговому различению апостериорных вероятностей. Посмотрим, как изменяется это правило, когда наблюдатель учитывает цены за решения. Переходя от апостериорных вероятностей $f(x/h_1)$, $f(x/h_2)$ к апостериорным вероятностям состояний $f(h_1/x)$ и $f(h_2/x)$, по формуле Байеса получим

$$\lambda(x) = \frac{q_2 f(h_2/x)}{q_1 f(h_1/x)} \leq \frac{q_1 c_\alpha}{q_2 c_\beta}.$$

Из последнего выражения можно заметить, что в случае $q_1 = q_2$ байесовская стратегия (3.7) предписывает пороговое сравнение апостериорных вероятностей

$$f(h_2/x) \leq \frac{c_\alpha}{c_\beta} f(h_1/x),$$

причем порогом является отношение c_α/c_β относительных цен. Для c_α , c_β просто принимается наиболее вероятная гипотеза, т. е. получается основное правило, с которого мы начали изучение теории.

Если $c_\alpha \neq c_\beta$ и $q_1 \neq q_2$, то происходит некоторое смещение, в результате чего порог для апостериорных вероятностей $f(h_1/x)$ и $f(h_2/x)$ оказывается отличным от единицы.

ПРИЛОЖЕНИЕ IV

РАБОЧАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА

В ЭКСПЕРИМЕНТЕ С ПРИНУДИТЕЛЬНЫМ ВЫБОРОМ [14]

Как указывалось в главе 6, различные модели порога можно получить, квантуя отношение правдоподобия $\lambda(x)$. Так, в теории высокого порога используется одно значение отношения правдоподобия, в теории низкого порога — два значения.

Можно использовать также большее число значений функции $\lambda(x)$. Ниже рассматривается модель обнаружения сигнала в схеме с принудительным выбором с двумя интервалами возбуждения. В этой схеме используются три значения λ .

Пусть сигналы, появляющиеся последовательно в первом и втором интервалах, обозначены x_1 и x_2 . Тогда отношение правдоподобия имеет вид

$$\lambda(x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2/sn)}{f(x_1, x_2/ns)}, \quad (\text{IV.1})$$

где $f(x_1, x_2/sn)$ — апостериорная плотность вероятности величин x_1 , x_2 при условии, что полезный сигнал $s(t)$ появился в первом интервале, а шум — во втором (sn — «signal—noise»); $f(x_1, x_2/ns)$ —

апостериорная плотность величин x_1, x_2 при условии, что полезный сигнал $s(t)$ появился во втором интервале, а в первом интервале был шум $n(t)$ («noise—signal»).

Пусть теперь функция $\lambda(x_1, x_2)$ определяется следующим образом:

$$\lambda(x_1, x_2) = \begin{cases} \lambda_1 = \frac{q_s(1-q_n)}{(1-q_s)q_n} > 1 & (x_1 > 1, x_2 < 1), \\ \lambda_2 = \frac{q_s q_n}{q_n q_s} = 1 & (x_1 > 1, x_2 > 1), \\ \lambda_2 = \frac{(1-q_s)(1-q_n)}{(1-q_n)(1-q_s)} = 1 & (x_1 < 1, x_2 < 1), \\ \lambda_3 = \frac{(1-q_s)q_n}{(1-q_n)q_s} < 1 & (x_1 < 1, x_2 > 1). \end{cases} \quad (\text{IV.2})$$

Из (IV.2) следует, что функция $\lambda(x_1, x_2)$ может иметь только три значения $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$.

Значение отношения правдоподобия λ_1 является максимальным. Поэтому если выбрать порог равным $\lambda_0 > \lambda_1$, что соответствует самому строгому критерию испытуемого, то решение о наличии полезного сигнала не будет принято никогда (см. решающее правило (3.7)). Отношение правдоподобия (IV.2) получается, если наблюдения x_1 и x_2 в интервалах независимы и плотности вероятностей $f(x_1, x_2/sn)$ и $f(x_1, x_2/ns)$ определяются следующим образом—

$$f(x_1, x_2/sn) = f(x_1/s) f(x_2/n), \quad f(x_1, x_2/ns) = f(x_1/n) f(x_2/s), \quad (\text{IV.3})$$

где

$$f(x/s) = \begin{cases} q_s & (1 \leq x \leq 2), \\ 1 - q_s & (0 \leq x < 1), \end{cases} \quad f(x/n) = \begin{cases} q_n & (1 \leq x \leq 2), \\ 1 - q_n & (0 \leq x < 1). \end{cases}$$

Сигналы x_1 и x_2 заменяются в интервале $(0 \leq x_1, x_2 \leq 2)$. Условные плотности вероятности $f(x_1, x_2/sn)$ и $f(x_1, x_2/ns)$ определяются тогда в четырех квадратных областях плоскости (x_1, x_2) в соответствии с рис. IV.1. Функцию $\lambda(x_1, x_2)$ (IV.2) легко получить на основании (IV.3).

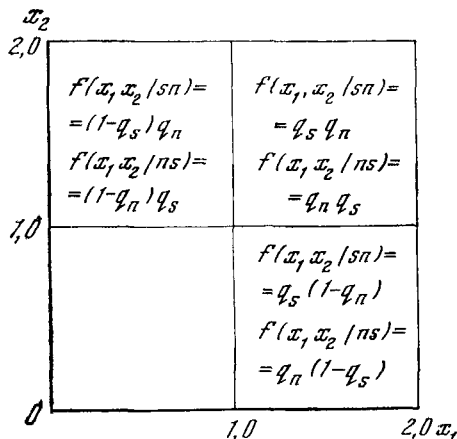
За вероятность обнаружения $p(S/s)$ в эксперименте с двумя интервалами стимулирования следует принять величину $p(R1/sn)$, равную вероятности выбора первого интервала, при условии, что полезный сигнал s содержится в первом интервале. За вероятность ложной тревоги $p(S/n)$ в эксперименте с двойным интервалом следует принять величину $p(R1/ns)$, равную вероятности выбора первого интервала, когда полезный сигнал s в действительности содержится во втором интервале. Для вычисления вероятности попаданий и вероятности ложной тревоги нужно интегрировать соответственно плотности вероятности $f(x_1, x_2/sn)$ и $f(x_1, x_2/ns)$ по области $\lambda(x_1, x_2) > \lambda_0$, определяемой порогом λ_0 , использованным наблюдателем.

Для самого строгого критерия решение о наличии сигнала s в первом интервале и об его отсутствии во втором принимается только в случае, если $\lambda(x_1, x_2) > 1$. Тогда для вероятности $p(R1/sn)$ можно записать

$$p(R1/sn) = \iint_{\lambda(x_1, x_2) > 1} f(x_1, x_2/sn) dx_1 dx_2 \quad (IV.4)$$

или на основании (IV.3)

$$p(R1/sn) = \int_0^1 \int_0^2 f(x_1/s) f(x_2/n) dx_1 dx_2 = q_s(1 - q_n). \quad (IV.5)$$



Р и с. IV.1. Апостериорные плотности для РХ с тремя уровнями квантования

Для вероятности ложной тревоги на основании (IV.3) можно записать

$$p(R1/ns) = \int_0^1 \int_0^2 f(x_1/s) f(x_2/n) dx_1 dx_2 = (1 - q_s) q_n. \quad (IV.6)$$

Для менее строгого критерия решение о наличии сигнала будет приниматься, если

$$\lambda(x_1, x_2) \geq 1.$$

Тогда вероятность $p(R1/sn)$ равна вероятности попадания случайной точки в плоскости (x_1, x_2) в один из трех квадратов (рис. IV.1), для которых выполняется условие $\lambda(x_1, x_2) \geq 1$.

Имеем

$$p(R1/sn) = \int_0^1 \int_0^2 f(x_1/s) f(x_2/n) dx_1 dx_2 + \int_0^1 \int_0^1 f(x_1/s) f(x_2/n) dx_1 dx_2 + \int_1^2 \int_1^2 f(x_1/s) f(x_2/n) dx_1 dx_2.$$

Подставляя значение функции $f(x_1, x_2/sn)$ для этих областей,

получим

$$p(R1/sn) = q_s(1 - q_n) + q_s q_n + (1 - q_s)(1 - q_n). \quad (IV.7)$$

Аналогично для вероятности $p(R1/ns)$ можно получить

$$p(R1/ns) = q_n(1 - q_s) + q_n q_s + (1 - q_s)(1 - q_n). \quad (IV.8)$$

Наконец, при очень нестрогом критерии (низком пороге λ_0) решение о наличии сигнала принимается, когда отношение $\lambda(x_1, x_2)$ равно любому значению. При этом вероятность $p(R1/sn)$ равна единице:

$$p(R1/sn) = q_s(1 - q_n) + q_s q_n + (1 - q_s)(1 - q_n) + (1 - q_s)q_n = 1, \quad (IV.9)$$

$$p(R1/ns) = q_n(1 - q_s) + q_n q_s + (1 - q_s)(1 - q_n) + (1 - q_n)q_s = 1.$$

Вероятности $p(R1/sn)$ и $p(R1/ns)$ в этом случае равны единице, так как попадание случайной точки в область $(0 \leq x_1, x_2 \leq 2)$ — достоверное событие.

Значения $p(R1/sn) = 1$ и $p(R1/ns) = 1$ соответствуют крайней правой точке РХ с координатами (1,1).

До сих пор различным решениям не приписывались некоторые цены. Это можно легко сделать, если считать, что решение при каждом значении отношения правдоподобия принимается с некоторой вероятностью. Так, например, если $\lambda(x_1, x_2) > 1$, то можно считать, что решение принимается с вероятностью, равной α . Тогда вместо (IV.5) и (IV.6) следует записать

$$p(R1/sn) = \alpha q_s(1 - q_n), \quad (IV.10)$$

$$p(R1/ns) = \alpha q_n(1 - q_s). \quad (IV.11)$$

Аналогично можно считать, что решение о $R1$ принимается с вероятностью, равной единице, если $\lambda(x_1, x_2) > 1$, либо с вероятностью, равной v , при условии $\lambda(x_1, x_2) = 1$, и не принимается, если $\lambda(x_1, x_2) < 1$. Тогда вместо (IV.7) и (IV.8) следует записать

$$p(R1/sn) = q_s(1 - q_n) + v q_s q_n + v(1 - q_s)(1 - q_n), \quad (IV.12)$$

$$p(R1/ns) = q_n(1 - q_s) + v q_n q_s + v(1 - q_s)(1 - q_n). \quad (IV.13)$$

Наконец, если решение о $R1$ принимается с вероятностью, равной единице, при условии $\lambda(x_1, x_2) \geq 1$, и с вероятностью, равной u , при условии $\lambda(x_1, x_2) < 1$, то вместо (IV.9) следует записать

$$p(R1/sn) = q_s(1 - q_n) + q_s q_n + (1 - q_s)(1 - q_n) + u(1 - q_s)q_n, \quad (IV.14)$$

$$p(R1/ns) = q_n(1 - q_s) + q_n q_s + (1 - q_s)(1 - q_n) + u(1 - q_n)q_s. \quad (IV.15)$$

Веса (смещения) α, u, v есть условные вероятности выбора при заданных значениях отношения правдоподобия. Эти веса изменяют

реакцию наблюдателя независимо от сигнала $x_1 x_2$ и связаны с механизмом принятия решения.

На рис. 6.10 изображена РХ для эксперимента с принудительным выбором в двух интервалах. Она состоит из трех отрезков. Короткий отрезок в начале координат соответствует $\lambda(x_1, x_2) > 1$, т. е. самому строгому критерию. Затем от точки с координатами $(q_s(1 - q_n), q_n(1 - q_s))$ начинается второй участок с наклоном $\lambda(x_1, x_2) = 1$. Этот участок занимает большую часть РХ и продолжается до точки с координатами $(1 - q_n + q_s q_n, 1 - q_s + q_s q_n)$. Эта часть РХ соответствует умеренному критерию наблюдателя. И наконец, последний участок РХ в правом верхнем углу соответствует минимальному порогу λ , т. е. наименее жесткому критерию наблюдателя.

При значении параметра, равном

$$v = \frac{q_s q_n}{q_n q_s} + (1 - q_s)(1 - q_n),$$

согласно (IV.11) и (IV.12) имеем

$$p(R1/sn) = q_s, \quad p(R1/ns) = q_n.$$

Отсюда можно заключить, что РХ для эксперимента типа «да—нет» лежит ниже, чем РХ в эксперименте с принудительным выбором (см. рис. 6.10). Это значит, что в эксперименте с двойным интервалом мы получаем в среднем больший процент правильных ответов. При построении РХ в схеме с двойным интервалом выясняется важное свойство РХ процесса решения. Именно в случае двойного интервала следует говорить уже о плоскости $x_1 x_2$, а для эксперимента с m интервалами — о m -мерном пространстве.

Таким образом, размерность пространства сигнала $x_1 x_2$ может быть значительно больше единицы. При этом чувствительность определяется границей m -мерного пространства $x_1, x_2, \dots, x_m$. Однако РХ процесса решения при этом остается одномерной. Это очень важное свойство РХ аналогично свойству шкалы $\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n)$, которая остается одномерной для любой размерности пространства $x_1, x_2, \dots, x_n$.

ПРИЛОЖЕНИЕ V

ДЕТЕКТОР ОГИБАЮЩЕЙ [14]

В приложении решается задача обнаружения полезного сигнала

$$s(t) = A \sin(2\pi f_1 t - \theta) \quad (*)$$

в наблюдаемом сигнале

$$x(t) = s(t) + n(t),$$

где шум $n(t)$ — гауссовский процесс с постоянной спектральной плотностью (белый шум).

Фаза θ предполагается случайной и имеет равномерное распределение с плотностью

$$g(\theta) = \frac{1}{2\pi}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Обнаружение сигнала $s(t)$ осуществляется «детектором огибающей». Ниже определяются отношение правдоподобия $\lambda(x_i)$ огибающей x_i и апостериорные плотности $f(x_i/s)$ и $f(x_i/n)$ огибающей.

Итак, вначале нужно проверить гипотезу о наличии $s(t)$ в сигнале вида

$$x(t) = s(t) + n(t),$$

где $n(t)$ — случайная функция.

Относительно $n(t)$ удобно предположить, что она представима рядом Фурье

$$n(t) = \sum \left(a_k \cos \frac{2\pi k}{T} t + b_k \sin \frac{2\pi k}{T} t \right), \quad (V.1)$$

где a_k, b_k — гауссовские независимые случайные величины, $M(a_k) = M(b_k) = 0$.

Используя разложение $n(t)$ в ряд Фурье, получаем¹

$$M \left[\frac{1}{T} \int_0^T n^2(t) dt \right] = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{wT} [M(a_k)^2 + M(b_k)^2].$$

С другой стороны, имеем

$$M \left[\frac{1}{T} \int_0^T n^2(t) dt \right] = \frac{1}{T} \int_0^T M[n^2(t)] dt = D = N_0 w, \quad (V.2)$$

где $w = 1/2$ ширины полосы частот шума; $N_0/2$ — спектральная плотность шума.

Далее, считая, что средняя энергия шума распределена равномерно между гармониками, получаем $M(a_k)^2 = M(b_k)^2 = D$ и на основании двух предыдущих выражений имеем $wTD = N_0 w$ или $D = N_0/T$.

Условные плотности вероятности коэффициентов a_k, b_k имеют вид

$$f(a_k/n) = (2\pi D)^{-1/2} \exp \left(-\frac{a_k^2}{2D} \right),$$

$$f(a_k/s) = (2\pi D)^{-1/2} \exp \left[-\frac{(a_k - \alpha_k)^2}{2D} \right], \quad (V.3)$$

¹ Число гармоник разложения равно $n = wT$, так как наивысшая частота w равна n/T .

где α_k — коэффициент Фурье разложения полезного сигнала $s(t)$.

На основании (V.1) для апостериорных плотностей вероятности можно записать

$$f(x/n) = \prod_{k=1}^{\infty} f(a_k/n) f(b_k/n),$$

$$f(x/s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \prod_{k \neq l}^{\infty} f(a_k/n) f[(a_l - \alpha_l)/n] f(b_k/n) f[(b_l - \beta_l)/n] d\theta, \quad (\text{V.4})$$

где α_l, β_l определяются в соответствии с формулой (*)

$$\alpha_l = A \cos \theta, \quad \beta_l = A \sin \theta, \quad \frac{\alpha_l^2 + \beta_l^2}{2} = \frac{A^2}{2} = \frac{E_s^2}{T}. \quad (\text{V.5})$$

Апостериорная плотность $f(x/s)$ получается в соответствии с правилом вычисления отношения правдоподобия для сложных гипотез. Как показано в Приложении I, в этом случае требуется дополнительное осреднение плотности $f(x - s(\theta)/n)$ по параметру θ .

На основании (V.3) и (V.4) для отношения правдоподобия можно записать

$$\lambda(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp \left[\frac{a_l \alpha_l + b_l \beta_l}{D} \right] \exp \left(- \frac{\alpha_l^2 + \beta_l^2}{2D} \right) d\theta.$$

Произведя возможные упрощения, получим

$$\lambda(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp \left[\frac{a_l \alpha_l + b_l \beta_l}{D} \right] \exp \left(- \frac{E_s}{TD} \right) d\theta. \quad (\text{V.6})$$

Коэффициенты Фурье a_l и b_l шума можно выразить через огибающую x_l колебания частоты f_l :

$$a_l \cos 2\pi f_l t + b_l \sin 2\pi f_l t = x_l \cos(2\pi f_l t - \gamma),$$

где $a_l = x_l \cos \gamma$; $b_l = x_l \sin \gamma$.

Тогда

$$a_l \alpha_l + b_l \beta_l = A x_l \cos(\theta - \gamma). \quad (\text{V.7})$$

Величина x_l является огибающей на частоте полезного сигнала. Окончательно $\lambda(x)$ принимает вид

$$\lambda(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp \left[\frac{x_l A \cos(\theta - \gamma)}{D} \right] \exp \left(- \frac{E_s}{DT} \right) d\theta.$$

Если ввести модифицированную функцию Бесселя нулевого порядка

$$I_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{x \cos \theta} d\theta,$$

то $\lambda(x)$ принимает вид

$$\lambda(x) = I_0\left(\frac{x_l A}{DT}\right) \exp\left(-\frac{E_s}{DT}\right). \quad (V.8)$$

Как следует из (V.8), отношение правдоподобия зависит только от огибающей x_l гармоники на частоте сигнала.

Так как функция Бесселя нулевого порядка $I_0(x)$ — монотонно возрастающая функция x , то отношение правдоподобия $\lambda(x_l)$ также является монотонной функцией x_l . Если говорить об оптимальном обнаружении сигнала с неизвестной фазой θ , то результат, полученный в (V.8), легко понять. Оптимальная процедура состоит в данном случае в измерении амплитуды огибающей x_l на частоте сигнала. Эта амплитуда не зависит от разности фаз между гармониками сигнала и шума.

Рассмотрим теперь следующую задачу: нужно найти апостериорные плотности $f(x_l/n)$ и $f(x_l/s)$.

Согласно определению, когда присутствует один шум $x_l^2 = a_l^2 + b_l^2$, квадрат нормированной нормальной случайной величины имеет χ^2 -распределение с одной степенью свободы. Следовательно, x_l^2 имеет χ^2 -распределение с двумя степенями свободы:

$$f\left(\frac{x_l^2}{\sigma^2} \middle| n\right) = \frac{1}{2} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_l}{\sigma}\right)^2\right].$$

Переходя к плотности вероятности величины x_l , окончательно можно записать (Приложение I)

$$f(x_l/n) = \frac{x_l}{\sigma^2} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_l}{\sigma}\right)^2\right]. \quad (V.9)$$

Последнее выражение известно как распределение Релея.

Для определения апостериорной плотности $f(x_l/s)$ следует опять воспользоваться правилом вычисления отношения правдоподобия для сложных гипотез (Приложение II).

Когда к сигналу $s(t)$ добавляется шум, то значение огибающей x_l зависит от разности фаз между гармониками сигнала и шума. Принимая фазу $\gamma = 0$, можно получить в соответствии с Приложением II следующее выражение для апостериорной плотности:

$$f(x_l/s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f[(x_l - A \cos \theta)/n] d\theta.$$

Прямое интегрирование здесь невозможно. Поэтому обычно используются приближения.

Пользуясь определением отношения правдоподобия, можно записать

$$f(x/s) = \lambda(x) f(x/n)$$

или, когда существенна лишь огибающая,

$$f(x_i/s) = \lambda(x_i) f(x_i/n).$$

Пользуясь этим выражением, можно вычислить апостериорную плотность $f(x/s)$ из соотношений (V.8), (V.9). Учитывая, что $E_s = A^2 T/2$ и $\sigma^2 = N_0/T$ ($N_0/2$ — значение спектральной плотности шума), можно окончательно записать

$$f(x_i/s) = \frac{x_i T}{N_0} I_0\left(\frac{x_i A T}{N_0}\right) \exp\left[-\left(\frac{A^2 + x_i^2}{2}\right) \frac{T}{N_0}\right]. \quad (\text{V.10})$$

Для больших значений амплитуды A плотность вероятности, величины x_i приближается к нормальной. Действительно, для $x \gg 1$ $I_0(x) \approx e^x (2\pi x)^{-1/2}$, следовательно, если $AT \gg N_0$, то

$$f(x_i/s) = \left(\frac{x_i}{A}\right)^{\frac{1}{2}} (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i - A}{\sigma}\right)^2\right]. \quad (\text{V.11})$$

Следовательно, эта кривая для x_i , близких к A и $A \gg \sigma$, имеет нормальное распределение с параметрами $N(A, \sigma)$.

На рис. 8.4 показаны функции $f(x_i/s)$ и РХ для различных значений A и узкополосного гауссовского шума. Плотности $f(x_i/s)$ зависят от отношения амплитуды сигнала к среднеквадратичному значению шума. Значению $A = 0$ соответствует сигнал, состоящий из одного шума.

ПРИЛОЖЕНИЕ VI

АПОСТЕРИОРНЫЕ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО ДЕТЕКТОРА [14]

В приложении получены апостериорные плотности вероятности сигнала на выходе энергетического детектора, которые затем используются для построения РХ и М-функций. В качестве наблюдаемой величины, на основании которой принимаются решения в энергетическом детекторе, используется величина

$$G = \int_0^T x^2(t) dt. \quad (\text{VI.1})$$

Определим апостериорные плотности вероятности величины G для различных схем опытов.

Абсолютная схема опытов

Необходимо определить апостериорные плотности вероятности статистики G при двух гипотезах

$$x(t) \equiv n(t) : H_1, \quad x(t) = s(t) + n(t) : H_2.$$

При первой гипотезе $s \equiv 0$, и, следовательно, статистика G равна

$$G_n = \int_0^T u^2(t) dt, \quad (\text{VI.2})$$

где $u(t)$ — шум на выходе полосового фильтра детектора с шириной полосы $2w$. Ввиду нелинейности квадратичного детектора для получения плотности вероятности $f(g/h)$ удобно использовать дискретное представление шума $u(t)$.

Интеграл (VI.2) в этом случае заменяется суммой

$$G_n = \sum_{i=1}^{2wT} u_i^2 \Delta t, \quad (\text{VI.3})$$

где $\Delta t = 1/2w$; $2wT = T/\Delta t$ — число точек, в которых берутся значения шума $u(t_i) = n_i$.

Предполагается, что $n(t)$ — белый гауссовский шум в полосе частот $2w$ с корреляционной функцией

$$k(\tau) = N_0 w \frac{\sin 2\pi w \tau}{2\pi w \tau}. \quad (\text{VI.4})$$

Отсюда следует, что значения шума в точках $t_i = i \cdot \Delta t$ некоррелированы и вследствие нормальности $u(t)$ независимы.

Удобно перейти к нормированной статистике

$$\frac{G_n}{\Delta t \cdot N_0 w} = \sum_{i=1}^{2wT} \left(\frac{u_i}{\sigma_n} \right)^2, \quad (\text{VI.5})$$

где $\sigma_n^2 = N_0 w$ — дисперсия случайной функции $u(t)$ на выходе полосового фильтра, если на входе имеется шум со спектральной плотностью $N_0/2$.

Нормированная величина $G_n/\Delta t \sigma_n$ имеет плотность вероятностей χ^2 с $2wT$ степенями свободы (Приложение I). Случайную величину в левой части (VI.5) можно также записать в виде

$$Y = \frac{G_n}{\Delta t N_0 w} = \frac{2G_n}{N_0}.$$

Следовательно, величина $2G_n/N_0$ также имеет χ^2 -распределение со степенями свободы.

Теперь следует определить характеристики случайной величины Y .

Условное математическое ожидание Y , когда на входе детектора один шум, согласно (VI.5) равно

$$M(Y) = M\left[\frac{2G_n}{N_0}\right] = 2wT \quad (\text{VI.6})$$

и, следовательно, равно числу степеней свободы $2wT$.

Условная дисперсия величины Y равна

$$D(Y) = D\left(\frac{2G_n}{N_0}\right) = 4wT$$

и, следовательно, есть удвоенное число степеней свободы величины Y .

Отсюда следует, что дисперсия D_n величины G_n определяется выражением

$$D_n = N_0^2 wT. \quad (\text{VI.7})$$

На основании (VI.6) можно перейти к условному математическому ожиданию статистики G_n , которое запишется в виде

$$m_n = M(G_n) = N_0 wT. \quad (\text{VI.8})$$

Определим теперь характеристики статистики G , когда на входе детектора имеется сигнал

$$x(t) = s(t) + n(t).$$

В этом случае на выходе детектора наблюдается величина

$$G_s = \int_0^T [s(t) + n(t)]^2 dt. \quad (\text{VI.9})$$

Заменяя интеграл суммой, получим

$$G_s = \sum_{i=1}^{2wT} (s_i + u_i)^2 \Delta t. \quad (\text{VI.10})$$

Далее, так же как раньше, следует перейти к нормированной величине

$$Y_s = \frac{G_s}{\Delta t \cdot N_0 w} \sum_{i=1}^{2wT} \left(\frac{s_i + u_i}{\sigma_n} \right)^2, \quad (\text{VI.11})$$

где $\sigma_n^2 = N_0 w$.

Величина Y_s равна сумме квадратов независимых нормальных величин с математическими ожиданиями s_i/σ_n и единичными дисперсиями.

Распределением величины Y_s является нецентрированное $(\chi')^2$ -распределение с $2wT$ степенями свободы (Приложение I).

Параметром распределения является

$$\lambda = \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{i=1}^{2wT} s_i^2. \quad (\text{VI.12})$$

Математическое ожидание нецентрированного $(\chi')^2$ -распределения равно

$$M(Y_s) = 2wT + \lambda. \quad (\text{VI.13})$$

Так как λ можно представить в виде

$$\lambda = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{2wT} s_i^2 = \frac{E_s}{N_0 w \Delta t} = \frac{2E_s}{N_0}, \quad (\text{VI.14})$$

то

$$M(Y_s) = M\left(\frac{2G_s}{N_0}\right) = 2wT + \frac{2E_s}{N_0}$$

и

$$m_s = M(G_s) = \frac{N_0}{2}(2wT + \lambda). \quad (\text{VI.15})$$

Дисперсию величины Y_s можно вычислить на основании (VI.11) и (VI.14):

$$D\left(\frac{2G_s}{N_0}\right) = 4wT + \frac{8E_s}{N_0}$$

и

$$D_s = D(G_s) = N_0^2(wT + \lambda). \quad (\text{VI.16})$$

Дифференциальная схема опытов

На основании (VI.15) и (VI.16) можно определить математическое ожидание и дисперсию для дифференциальной схемы опытов. В этом случае нужно определить условные математические ожидания и дисперсию статистики на выходе детектора, когда на его выходе имеются сигналы

$$x(t) = c(t) + n(t)$$

или

$$x(t) = c(t) + s(t) + n(t),$$

где $c(t)$ — основной сигнал.

При вычислении математического ожидания и дисперсии для сигнала

$$x(t) = c(t) + n(t)$$

в (VI.15) и (VI.16) просто следует положить $c \equiv s$.

Тогда математическое ожидание нормированной величины равно

$$M\left(\frac{2G_n}{N_0}\right) = 2wT + \frac{2E_s}{N_0}.$$

Откуда для математического ожидания величины G_n можно получить

$$m_n = M(G_n) = N_0 wT + E_s. \quad (\text{VI.17})$$

Дисперсия нормированной величины равна

$$D\left(\frac{2G_n}{N_0}\right) = 4wT + \frac{8E_s}{N_0},$$

откуда для дисперсии величины G_n имеем

$$D_n = D(G_n) = N_0^2(wT + \lambda).$$

При вычислении математического ожидания и дисперсии для сигнала

$$x(t) = c(t) + s(t) + n(t)$$

также можно воспользоваться (VI.15) и (VI.16), где сигнал s нужно заменить сигналом $c + s$. Тогда можно получить

$$M\left(\frac{2G_{s+c}}{N_0}\right) = 2wT + \frac{2E_{s+c}}{N_0}, \quad D\left(\frac{2G_{s+c}}{N_0}\right) = 4wT. \quad (\text{VI.18})$$

Когда число степеней свободы величины Y_s достаточно велико, χ^2 -распределение аппроксимируется нормальным (Приложение I).

Параметры апостериорных нормальных плотностей определяются согласно (VI.6), (VI.7), (VI.15) — (VI.17). Имея апостериорные плотности вероятностей статистики G , можно построить РХ и М-функции для энергетического детектора.

Другой удобной величиной, которую можно использовать для характеристики работы детектора, является вероятность правильного ответа $p_2(S/s)$ в опытах с двумя интервалами стимулирования. Величину $p_2(S/s)$ можно легко определить по экспериментальной РХ как площадь под РХ (см. главу 4).

Для того чтобы вычислить величину $p_2(S/s)$, следует воспользоваться величиной

$$z = G_1 - G_2,$$

где G_1 и G_2 — статистики, наблюдаемые соответственно в первом и втором интервалах наблюдения (см. главу 9).

Нетрудно показать, что для достаточно большого числа степеней свободы величина z распределена нормально.

Вероятность попаданий $p_2(S/s)$ определяется следующими двумя формулами:

в эксперименте по абсолютной схеме

$$p(S/s) = \Phi(h_i) \quad (i = 1, 2), \quad (\text{VI.19})$$

где

$$h_1 = \frac{E_s/N_0}{(2wT + 2E_s/N_0)^{1/2}}; \quad (\text{VI.20})$$

в эксперименте по дифференциальной схеме

$$h_1 = \frac{(E_{c+s} - E_c)/N_0}{(2wT + 2E_s/E_0 + E_{c+s}/N_0)^{1/2}}. \quad (\text{VI.21})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ VII

ОЦЕНКА СОБСТВЕННЫХ ШУМОВ ДЕТЕКТОРА

Таблицы d'

При описании отдельных нейронов или групп нейронов, об разующих нейронные системы, важное место уделяется реакциям на слабые раздражители. Для раздражителей, сравнимых с абсолютным порогом, речь идет об оценке абсолютной чувствительности системы. Для раздражителей, сравнимых с дифференциальным порогом, речь идет об оценке чувствительности системы к изменению раздражителей. Дифференциальная чувствительность сложных сигналов связана с различением сигналов.

Известно, что каждый нейрон обладает спонтанной активностью в отсутствие стимула, это равносильно наличию внутреннего шума. Следствием этого является внутренний шум нейронных систем. Так как для решения различных задач используются отличные друг от друга цепочки нейронов, следует ожидать, что их внутренние шумы будут различными. Таким образом, по характеру и величине внутренних шумов нейронной системы можно судить о структуре последней.

Из сказанного следует, как важно изучать внутренние шумы. Их исследование позволяет:

— во-первых, получить представление о предельных возможностях нейронной системы;

— во-вторых, судить о «сенсорном пространстве», в котором нейронная система решает ту или иную задачу;

— в-третьих, судить о внутренней структуре нейронной системы и изменениях этой структуры в процессе решения различных задач.

Существуют эксперименты, прямо подтверждающие наличие внутренних шумов в системе. Так, известно, что ложные тревоги возникают из-за наличия собственных шумов. О их величине можно судить по значению вероятности ложной тревоги, определяемой точкой пересечения психометрической функции с осью ординат. Интересно, что вероятность ложной тревоги может быть различ-

ной для одного и того же испытуемого в зависимости от его «установки» или настроения перед экспериментом. Это подтверждает предположение о зависимости внутренних шумов от решаемой задачи. Как уже указывалось, такая зависимость может осуществляться благодаря изменению внутренней структуры нейронной системы.

В дальнейшем под оценкой собственных шумов системы (детектора) будет пониматься нахождение параметра

$$d' = \sqrt{2E_s/N},$$

что равносильно оценке спектральной плотности $N/2$ собственного шума детектора, так как энергия сигнала

$$E_s = \int s^2(t) dt$$

легко может быть определена измерением на генераторе, задающем сигнал $s(t)$.

Как было показано в главе 7, d' является аргументом М-функции и параметром соответствующей РХ.

Для того чтобы оценить параметр d' , необходимо описать процесс восприятия сигналов нейронной системой. Если речь идет о слабых сигналах, то описание существенно упрощается. В настоящей книге такое описание проводится с использованием шкалы отношения правдоподобия. Основными характеристиками при этом будут РХ и М-функция процесса решения. Для оценки можно теперь использовать теорию РХ и М-функций, развитую в главах 7—9. Рассмотрим оценку параметра d' в случае, когда сигнал $s(t)$ известен точно. Если считать, что $s(t)$ смешивается с внутренним шумом аддитивно, то детектор принимает решение на основании сигнала

$$x(t) = s(t) + n(t).$$

Теория для этого случая развита в главах 8 и 9 для разных схем опытов. Для опытов по абсолютной схеме с одним интервалом стимулирования (первая схема) основные уравнения (9.5) имеют вид

$$p(S/s) = \operatorname{erfc}(x_0 - d'), \quad p(S/n) = \operatorname{erfc} x_0, \quad (VII.1)$$

$$d' = (2E_s/N)^{1/2}.$$

Первое уравнение определяет М-функцию (как функцию параметра d') для значения x_0 , соответствующего заданной вероятности ложной тревоги. Это значение x_0 определяется из второго уравнения (VII.1). С другой стороны, уравнения (VII.1) являются параметрическими уравнениями (параметр x_0) РХ решения. На основании этих уравнений были составлены таблицы значений вероятностей $p(S/s)$ и $p(S/n)$ в зависимости от значений параметра d' [11]. В таблице содержатся РХ для положительных и отрицательных значений d' . Из уравнений (VII.1) можно

заметить, что для отрицательных значений параметра d' РХ расположена ниже диагонали первого координатного угла и симметрична относительно диагонали рис. VII.1. Таблицы можно использовать как для оценки параметра d' , так и для построения М-функций.

Для оценки параметра d' входными величинами таблицы I являются вероятности $p(S/s)$ и $p(S/n)$, расположенные соответственно в первом вертикальном и горизонтальном столбцах таблицы. Так, например, для $p(S/s) = 0,70$ и $p(S/n) = 0,1$ получаем $d' = 1,80$.

Таблицы d' можно использовать также для оценки параметра E_{σ}' в дифференциальной схеме опытов, которые описываются уравнениями (9.9).

Для абсолютной и дифференциальной схем опытов в двойном интервале РХ определяется уравнениями (9.13), (9.14). Поэтому таблица параметра d' также применима.

Рассмотрим теперь оценку параметра d' в случае, когда полезный сигнал $s(t)$ определен с точностью до фазы и эксперимент проводится по абсолютной схеме с одним интервалом стимулирования. Эта схема имеет большое значение в психоакустике. Как было показано в § 5 главы 8, применение отношения правдоподобия приводит в этом случае к детектору огибающей. Априорные плотности вероятности огибающей $f(x_i/n)$ и $f(x_i/s)$ определяются уравнениями (8.31). Так как плотности (8.31) не являются гауссовскими, то непосредственное применение таблиц невозможно. Однако, как указывалось в § 5 главы 8, при больших значениях амплитуды A полезного сигнала $s(t)$ плотность вероятности $f(x_i/s)$ близка к нормальной. Следовательно, в этом случае для аппроксимации М-функции детектора огибающей можно использовать первое уравнение (VII.1). Значение параметра x_0 , соответствующее вероятности ложной тревоги α_0 , нужно оценивать из второго уравнения (VII.1).

Если эксперимент по обнаружению чистого тона в узкополосном шуме проводится по дифференциальной схеме, то амплитуда полезного сигнала

$$c(t) + s(t) = (A + \Delta A) \cos \omega t$$

достаточно велика и выполняется условие $A \gg \sigma$, где σ — среднеквадратичное значение шума. В этом случае, как указывалось в § 5 главы 8, апостериорные плотности $f(x_i/s)$ и $f(x_i/n)$ можно

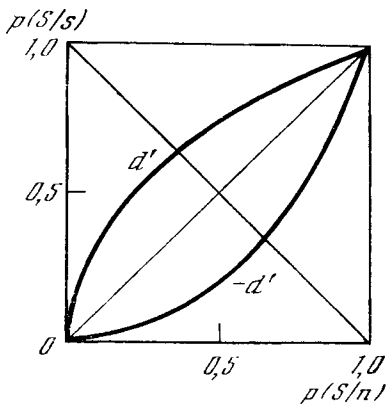


Рис. VII.1. Симметрия нормальных РХ

считать нормальными:

$$f(x_l/s) = (2\pi D)^{-\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{(x_l - A)^2}{2D} \right],$$

$$f(x_l/n) = (2\pi D)^{-\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{x_l^2}{2D} \right]. \quad (\text{VII.2})$$

Тогда таблицы d' можно использовать.

Рассмотрим теперь применение таблиц d' для построения М-функций на основании классических психометрических функций. Пусть имеются экспериментальные психометрические кривые как функции интенсивности сигнала s (или относительной интенсивности) (см. рис. 6.6, а). Параметром семейства кривых является вероятность ложной тревоги α , равная значению психометрической функции в нуле.

Пусть теперь для принятой схемы опытов апостериорные плотности $f(x/s)$ и $f(x/n)$ являются нормальными и, следовательно, имеют место уравнения (VII.1) для РХ и М-функции процесса решения. Учитывая это, можно для каждой пары значений α , $p(S/s)$ экспериментальной психометрической кривой определить по таблицам значение параметра d' . При этом для одной психометрической функции значение $\alpha_0 = p(S/n)$ остается постоянным и меняется только значение $p(S/s)$. Таким образом, можно определить вероятность попаданий $p(S/s)$ как функцию параметра d' , т. е. определить М-функцию.

При желании можно оценить значение спектральной плотности $N/2$ собственного шума детектора, используя соотношение

$$d' = (2E_s/N)^{1/2}.$$

Переход от психометрических функций к М-функциям имеет существенное значение для правильной интерпретации экспериментальных данных.

Психометрические функции отражают влияние собственных шумов детектора. Однако это влияние отражается неполно, так как остается неясной зависимость собственных шумов системы от интенсивности полезного сигнала s . Экспериментальные данные показывают, что существует зависимость внутренних шумов от внешнего сигнала s , что, по-видимому, связано с изменением внутренней структуры нейронной цепи, принимающей решение. Поэтому переход от психометрической функции к М-функции является существенным.

Не следует думать, что психометрические функции несут такую же информацию о системе, как М-функции. Переход от психометрических функций к М-функциям использует значительную дополнительную информацию, относящуюся к нейронной системе, принимающей решение. К ней относится, в частности, использование отношения правдоподобия и нормальных апостериорных плотностей вероятности $f(x/s)$, $f(x/n)$.

При построении М-функций по экспериментальным психометрическим функциям можно отказаться от предположения о нормальности функций $f(x/s)$ и $f(x/n)$. Для того чтобы проверить допущение нормальности, достаточно для семейства психометрических функций построить РХ процесса решения и затем оценить параметр d' для каждой точки РХ. Как известно, в случае нормальных плотностей на одной РХ параметр d' сохраняет постоянное значение. Если при переходе от одной точки к другой параметр d' изменяется, то это показывает, что РХ, основанная на нормальной аппроксимации, неудовлетворительно описывает экспериментальные РХ. В этом случае экспериментальные точки принадлежат нормальным теоретическим кривым с различными значениями параметра d' .

Такой случай действительно имел место при аппроксимации экспериментальной РХ в главе 9. Среднее значение параметра d' для кривой рис. 9.6 было принято равным 2, в то время как два других найденных значения d' для $p(S/s) = 0,83$, $p(S/n) = 0,4$ и $p(S/s) = 0,7$, $p(S/n) = 0,2$ оказались равными 1,20 и 1,36 соответственно. Это указывает либо на неточность нормальной аппроксимации РХ с равными дисперсиями $\sigma_s^2 = \sigma_n^2 = \sigma^2$, либо вообще на недопустимость нормальной аппроксимации. Эту неточность можно заметить также на кривой рис. 9.6, где имеется заметное отклонение теоретической кривой от экспериментальных точек.

Последнее применение таблиц d' связано с построением М-функций по значениям параметра d' . Имея значения параметра d' , можно быстро построить теоретическую М-функцию или РХ. Так, например, для того чтобы получить М-функцию для $p(S/n) = 0,10$, достаточно считать значения $p(S/s)$ в первом вертикальном столбце таблицы, а соответствующие значения параметра d' — в последнем вертикальном столбце под значением $p(S/n) = 0,10$. При этом для значений М-функции получается следующая таблица:

$$p(S/n) = 0,10$$

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} p(S/s) & 0,01 & \dots & 0,05 & \dots & 0,1 & \dots & 0,2 & \dots & 0,3 & \dots & 0,5 & \dots & 0,7 \\ d' & -1,04 & \dots & -0,36 & \dots & 0 & \dots & 0,44 & \dots & 0,76 & \dots & 1,28 & \dots & 1,80 \end{array}$$

Как уже указывалось, имеется две ветви М-кривой для $d' > 0$ и $d' < 0$. Для малых значений $p(S/s)$ значения $d' < 0$. Значение $d' = 0$ лежит на биссектрисе координатного угла, так как оно соответствует РХ

$$p(S/s) = p(S/n).$$

Затем значения параметра d' становятся положительными.

Аналогично по таблицам d' можно построить теоретические РХ. Для этого, задаваясь значениями параметра d' , нужно находить в таблице соответствующие им значения вероятностей $p(S/s)$ и $p(S/n)$.

Таблица I

Значения параметра d'

$p(S/n)$	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09	.10
$p(S/s)$										
.01	.0	-.27	-.44	-.57	-.68	-.77	-.85	-.92	-.98	-1.04
.02	.27	.0	-.17	-.30	-.41	-.50	-.58	-.65	-.71	-.77
.03	.44	.17	.0	-.17	-.24	-.33	-.41	-.48	-.54	-.60
.04	.57	.30	-.13	.0	-.11	-.20	-.28	-.35	-.41	-.47
.05	.68	.41	.24	.11	-.0	-.09	-.17	-.24	-.30	-.36
.06	.77	.50	.33	.20	.09	-.0	-.08	-.15	-.21	-.27
.07	.85	.58	.41	.28	.17	.08	.0	-.07	-.13	-.19
.08	.92	.65	.48	.35	.24	.15	.07	.0	-.06	-.12
.09	.98	.71	.54	.41	.30	.21	.13	.06	.0	-.06
.10	1.04	.77	.60	.47	.36	.27	.19	.12	.06	-.06
.11	1.09	.82	.65	.52	.41	.32	.24	.17	.11	.05
.12	1.14	.88	.70	.58	.46	.38	.30	.22	.16	.10
.13	1.19	.92	.75	.62	.51	.42	.34	.27	.21	.15
.14	1.24	.97	.80	.67	.56	.47	.39	.32	.26	.20
.15	1.28	1.01	.84	.71	.60	.51	.43	.36	.30	.24
.16	1.33	1.06	.89	.76	.65	.56	.48	.41	.35	.29
.17	1.37	1.10	.93	.80	.69	.60	.52	.45	.39	.33
.18	1.40	1.14	.96	.84	.72	.64	.56	.48	.42	.36
.19	1.44	1.17	1.00	.87	.76	.67	.59	.52	.46	.40
.20	1.48	1.21	1.04	.91	.80	.71	.63	.56	.50	.44
.21	1.52	1.24	1.08	.94	.84	.74	.66	.60	.54	.48
.22	1.55	1.28	1.11	.98	.87	.78	.70	.63	.57	.51
.23	1.58	1.31	1.14	1.01	.90	.81	.73	.66	.60	.54
.24	1.62	1.34	1.18	1.04	.94	.84	.76	.70	.64	.58
.25	1.64	1.38	1.20	1.08	.96	.88	.80	.72	.66	.60
.26	1.68	1.41	1.24	1.11	1.00	.91	.83	.76	.70	.64
.27	1.71	1.44	1.27	1.14	1.03	.94	.86	.79	.73	.67
.28	1.74	1.47	1.30	1.17	1.06	.97	.89	.82	.76	.70
.29	1.76	1.50	1.32	1.20	1.08	1.00	.92	.84	.78	.72
.30	1.80	1.52	1.36	1.22	1.12	1.02	.94	.88	.82	.76
.31	1.82	1.54	1.38	1.24	1.14	1.04	.96	.90	.84	.78
.32	1.85	1.58	1.41	1.28	1.17	1.08	1.00	.93	.87	.81
.33	1.88	1.61	1.44	1.31	1.20	1.11	1.03	.96	.90	.84
.34	1.91	1.64	1.47	1.34	1.23	1.14	1.06	.99	.93	.87
.35	1.94	1.66	1.50	1.36	1.26	1.16	1.08	1.02	.96	.90
.36	1.96	1.69	1.52	1.39	1.28	1.19	1.11	1.04	.98	.92
.37	1.99	1.72	1.55	1.42	1.31	1.22	1.14	1.07	1.01	.95
.38	2.02	1.74	1.58	1.44	1.34	1.24	1.16	1.10	1.04	.98
.39	2.04	1.77	1.60	1.47	1.36	1.27	1.19	1.12	1.06	1.00
.40	2.06	1.80	1.62	1.50	1.38	1.30	1.22	1.14	1.08	1.02
.41	2.09	1.82	1.65	1.52	1.41	1.32	1.24	1.17	1.11	1.05
.42	2.12	1.85	1.68	1.55	1.44	1.35	1.27	1.20	1.14	1.08
.43	2.14	1.87	1.70	1.57	1.46	1.37	1.29	1.22	1.16	1.10
.44	2.17	1.90	1.73	1.60	1.49	1.40	1.32	1.25	1.19	1.13
.45	2.19	1.92	1.75	1.62	1.51	1.42	1.34	1.27	1.21	1.15
.46	2.22	1.95	1.78	1.65	1.54	1.45	1.37	1.30	1.24	1.18
.47	2.24	1.98	1.80	1.68	1.56	1.48	1.40	1.32	1.26	1.20
.48	2.27	2.00	1.83	1.70	1.59	1.50	1.42	1.35	1.29	1.23
.49	2.30	2.02	1.86	1.72	1.62	1.52	1.44	1.38	1.32	1.26
.50	2.32	2.05	1.88	1.75	1.64	1.55	1.47	1.40	1.34	1.26

Таблица I (продолжение)

$p(S/n)$	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09	.10
$p(S/s)$										
.51	2.34	1.08	1.90	1.78	1.66	1.58	1.50	1.42	1.36	1.30
.52	2.37	2.10	1.93	1.80	1.69	1.60	1.52	1.45	1.39	1.33
.53	2.40	2.12	1.96	1.82	1.72	1.62	1.54	1.48	1.42	1.35
.54	2.42	2.15	1.98	1.84	1.74	1.65	1.57	1.50	1.44	1.38
.55	2.45	2.18	2.01	1.88	1.77	1.68	1.60	1.53	1.47	1.41
.56	2.47	2.20	2.03	1.90	1.79	1.70	1.62	1.55	1.49	1.43
.57	2.50	2.23	2.06	1.93	1.82	1.73	1.65	1.58	1.52	1.46
.58	2.52	2.25	2.08	1.95	1.84	1.75	1.67	1.60	1.54	1.48
.59	2.55	2.28	2.11	1.98	1.87	1.78	1.70	1.63	1.57	1.51
.60	2.58	2.30	2.14	2.00	1.90	1.80	1.72	1.66	1.60	1.54
.61	2.60	2.33	2.16	2.03	1.92	1.83	1.75	1.68	1.62	1.56
.62	2.62	2.36	2.18	2.06	1.94	1.86	1.78	1.70	1.64	1.58
.63	2.65	2.38	2.21	2.08	1.97	1.88	1.80	1.73	1.67	1.61
.64	2.68	2.41	2.24	2.11	2.00	1.91	1.83	1.76	1.70	1.64
.65	2.70	2.44	2.26	2.14	2.02	1.94	1.86	1.78	1.72	1.66
.66	2.73	2.46	2.29	2.16	2.05	1.96	1.88	1.81	1.75	1.69
.67	2.76	2.49	2.32	2.19	2.08	1.99	1.91	1.84	1.78	1.72
.68	2.79	2.52	2.35	2.22	2.11	2.02	1.94	1.87	1.81	1.75
.69	2.82	2.56	2.38	2.26	2.14	2.06	1.98	1.90	1.84	1.78
.70	2.84	2.58	2.40	2.28	2.16	2.08	2.00	1.92	1.86	1.80
.71	2.88	2.60	2.44	2.30	2.20	2.10	2.02	1.96	1.90	1.84
.72	2.90	2.63	2.46	2.33	2.22	2.13	2.05	1.98	1.92	1.86
.73	2.93	2.66	2.49	2.36	2.25	2.16	2.08	2.01	1.95	1.89
.74	2.96	2.69	2.52	2.39	2.28	2.19	2.11	2.04	1.98	1.92
.75	3.00	2.72	2.56	2.42	2.32	2.22	2.14	2.08	2.02	1.96
.76	3.02	2.76	2.58	2.46	2.34	2.26	2.18	2.10	2.04	1.98
.77	3.06	2.79	2.62	2.49	2.38	2.29	2.21	2.14	2.08	2.02
.78	3.09	2.82	2.65	2.52	2.41	2.32	2.24	2.17	2.11	2.05
.79	3.12	2.86	2.68	2.56	2.44	2.36	2.28	2.20	2.14	2.08
.80	3.16	2.89	2.72	2.59	2.48	2.39	2.31	2.24	2.18	2.12
.81	3.20	2.93	2.76	2.63	2.52	2.43	2.35	2.28	2.22	2.16
.82	3.24	2.96	2.80	2.66	2.56	2.46	2.38	2.32	2.26	2.20
.83	3.27	3.00	2.83	2.70	2.59	2.50	2.42	2.35	2.29	2.23
.84	3.31	3.04	2.87	2.74	2.63	2.54	2.46	2.39	2.33	2.27
.85	3.36	3.09	2.92	2.79	2.68	2.59	2.51	2.44	2.38	2.32
.86	3.40	3.13	2.96	2.83	2.72	2.63	2.55	2.48	2.42	2.36
.87	3.45	3.18	3.01	2.88	2.77	2.68	2.60	2.53	2.47	2.41
.88	3.50	3.22	3.06	2.92	2.82	2.72	2.64	2.58	2.52	2.46
.89	3.55	3.28	3.11	2.98	2.87	2.78	2.70	2.63	2.58	2.51
.90	3.60	3.33	3.16	3.03	2.92	2.83	2.75	2.68	2.62	2.56
.91	3.66	3.39	3.22	3.09	2.98	2.89	2.81	2.74	2.68	2.62
.92	3.72	3.45	3.28	3.15	3.04	2.95	2.87	2.80	2.74	2.68
.93	3.79	3.52	3.35	3.22	3.11	3.02	2.94	2.87	2.81	2.75
.94	3.87	3.60	3.43	3.30	3.19	3.10	3.02	2.95	2.89	2.83
.95	3.96	3.69	3.52	3.39	3.28	3.19	3.11	3.04	2.98	2.92
.96	4.07	3.80	3.63	3.50	3.39	3.30	3.22	3.15	3.09	3.03
.97	4.20	3.93	3.76	3.63	3.52	3.43	3.35	3.28	3.22	3.16
.98	4.37	4.10	3.93	3.80	3.69	3.60	3.52	3.45	3.39	3.33
.99	4.64	4.37	4.20	4.07	3.96	3.87	3.79	3.72	3.66	3.60

Таблица I (продолжение)

$p(S/n)$	.11	.12	.13	.14	.15	.16	.17	.18	.19	.20
$p(S/s)$										
.01	—1.09	—1.14	—1.19	—1.24	—1.28	—1.33	—1.37	—1.40	—1.44	—1.48
.02	— .82	— .88	— .92	— .92	—1.01	—1.06	—1.10	—1.14	—1.17	—1.21
.03	— .65	— .70	— .75	— .80	— .84	— .89	— .93	— .96	—1.00	—1.04
.04	— .52	— .58	— .62	— .67	— .71	— .76	— .80	— .84	— .87	— .91
.05	— .41	— .46	— .51	— .57	— .60	— .65	— .69	— .72	— .76	— .80
.06	— .32	— .38	— .42	— .47	— .51	— .56	— .60	— .64	— .67	— .71
.07	— .24	— .30	— .34	— .39	— .43	— .48	— .52	— .56	— .59	— .63
.08	— .17	— .22	— .27	— .32	— .36	— .41	— .45	— .48	— .52	— .56
.09	— .11	— .16	— .21	— .26	— .30	— .35	— .39	— .42	— .46	— .50
.10	— .05	— .10	— .15	— .20	— .24	— .29	— .33	— .36	— .40	— .44
.11	0	— .06	— .10	— .15	— .19	— .24	— .28	— .32	— .35	— .39
.12	.06	0	— .04	— .10	— .14	— .18	— .22	— .26	— .30	— .34
.13	.10	.04	0	— .05	— .09	— .14	— .18	— .22	— .25	— .29
.14	.15	.10	.05	0	— .04	— .09	— .13	— .16	— .20	— .24
.15	.19	.14	.09	.04	0	— .05	— .09	— .12	— .16	— .20
.16	.24	.18	.14	.09	.05	0	— .04	— .08	— .11	— .15
.17	.28	.22	.18	.13	.09	.04	0	— .04	— .07	— .11
.18	.32	.26	.22	.16	.12	.08	.04	0	— .04	— .08
.19	.35	.30	.30	.20	.16	.11	.07	.04	0	— .04
.20	.39	.34	.29	.24	.20	.15	.11	.08	.04	0
.21	.42	.37	.32	.28	.24	.18	.14	.11	.08	.04
.22	.46	.40	.36	.31	.27	.22	.18	.14	.11	.07
.23	.49	.44	.39	.34	.30	.25	.21	.18	.14	.10
.24	.52	.47	.42	.38	.34	.28	.24	.21	.18	.14
.25	.56	.50	.46	.40	.36	.32	.28	.24	.20	.16
.26	.59	.54	.49	.44	.40	.35	.31	.28	.24	.20
.27	.62	.56	.52	.47	.43	.38	.34	.30	.27	.23
.28	.65	.60	.55	.50	.46	.41	.37	.34	.30	.26
.29	.68	.62	.58	.52	.48	.44	.40	.36	.32	.28
.30	.70	.65	.60	.56	.52	.46	.42	.39	.36	.32
.31	.72	.67	.62	.58	.54	.48	.44	.41	.38	.34
.32	.76	.70	.66	.61	.57	.52	.48	.44	.41	.37
.33	.79	.74	.69	.64	.60	.55	.51	.48	.44	.40
.34	.82	.76	.72	.67	.63	.58	.54	.50	.47	.43
.35	.84	.79	.74	.70	.66	.60	.56	.53	.50	.46
.36	.87	.82	.77	.72	.68	.63	.59	.56	.52	.48
.37	.90	.84	.80	.75	.71	.66	.62	.58	.55	.51
.38	.92	.87	.82	.78	.74	.68	.64	.61	.58	.54
.39	.95	.90	.85	.80	.76	.71	.67	.64	.60	.56
.40	.98	.92	.88	.82	.78	.74	.70	.66	.62	.58
.41	1.00	.94	.90	.85	.81	.76	.72	.68	.65	.61
.42	1.03	.98	.93	.88	.84	.79	.75	.72	.68	.64
.43	1.05	1.00	.95	.90	.86	.81	.77	.74	.70	.66
.44	1.08	1.02	.98	.93	.89	.84	.80	.76	.73	.69
.45	1.10	1.04	1.00	.95	.91	.86	.82	.78	.75	.71
.46	1.13	1.08	1.03	.98	.94	.89	.85	.82	.78	.74
.47	1.16	1.10	1.06	1.00	.96	.92	.88	.84	.80	.76
.48	1.18	1.12	1.08	1.03	.99	.94	.90	.86	.83	.79
.49	1.20	1.15	1.10	1.06	1.02	.96	.92	.89	.86	.82
.50	1.23	1.18	1.13	1.08	1.04	.99	.95	.92	.88	.84

Таблица I (продолжение)

$p(S/n)$	.11	.12	.13	.14	.15	.16	.17	.18	.19	.20
$p(S/s)$										
.51	1.26	1.20	1.16	1.10	1.06	1.02	.98	.94	.90	.86
.52	1.28	1.22	1.18	1.13	1.09	1.04	1.00	.96	.93	.89
.53	1.30	1.25	1.20	1.16	1.12	1.06	1.02	.99	.96	.92
.54	1.33	1.28	1.23	1.18	1.14	1.09	1.05	1.02	.98	.94
.55	1.36	1.30	1.26	1.21	1.17	1.12	1.08	1.04	1.01	.97
.56	1.38	1.32	1.28	1.23	1.19	1.14	1.10	1.06	1.03	.99
.57	1.41	1.36	1.31	1.26	1.22	1.17	1.13	1.10	1.06	1.02
.58	1.43	1.38	1.33	1.28	1.24	1.19	1.15	1.12	1.08	1.04
.59	1.46	1.40	1.36	1.31	1.27	1.22	1.18	1.14	1.11	1.07
.60	1.48	1.43	1.38	1.34	1.30	1.24	1.20	1.17	1.14	1.10
.61	1.51	1.46	1.41	1.36	1.32	1.27	1.23	1.20	1.16	1.12
.62	1.54	1.48	1.44	1.38	1.34	1.30	1.26	1.22	1.18	1.14
.63	1.56	1.50	1.46	1.41	1.37	1.32	1.28	1.24	1.21	1.17
.64	1.59	1.54	1.49	1.44	1.40	1.35	1.31	1.28	1.24	1.20
.65	1.62	1.56	1.52	1.46	1.42	1.38	1.34	1.30	1.26	1.22
.66	1.64	1.58	1.54	1.49	1.45	1.40	1.36	1.32	1.29	1.25
.67	1.67	1.62	1.57	1.52	1.48	1.43	1.39	1.30	1.32	1.28
.68	1.70	1.64	1.60	1.55	1.51	1.46	1.42	1.38	1.35	1.31
.69	1.74	1.68	1.64	1.58	1.54	1.50	1.46	1.42	1.38	1.34
.70	1.76	1.70	1.66	1.60	1.56	1.52	1.48	1.44	1.40	1.36
.71	1.78	1.73	1.68	1.64	1.60	1.54	1.50	1.47	1.44	1.40
.72	1.81	1.76	1.71	1.66	1.62	1.57	1.53	1.50	1.46	1.42
.73	1.84	1.78	1.74	1.69	1.65	1.60	1.56	1.52	1.49	1.45
.74	1.87	1.82	1.77	1.72	1.68	1.63	1.59	1.56	1.52	1.48
.75	1.90	1.85	1.80	1.76	1.72	1.66	1.62	1.59	1.56	1.52
.76	1.94	1.88	1.84	1.78	1.74	1.70	1.66	1.62	1.58	1.54
.77	1.97	1.92	1.87	1.82	1.78	1.73	1.69	1.66	1.62	1.58
.78	2.00	1.94	1.90	1.85	1.81	1.76	1.72	1.68	1.65	1.61
.79	2.04	1.98	1.94	1.88	1.84	1.80	1.76	1.72	1.68	1.64
.80	2.02	2.09	1.97	1.92	1.88	1.83	1.79	1.76	1.72	1.68
.81	2.11	2.06	2.01	1.96	1.92	1.87	1.83	1.80	1.76	1.72
.82	2.14	2.09	2.04	2.00	1.96	1.90	1.86	1.83	1.80	1.76
.83	2.18	2.12	2.08	2.03	1.99	1.94	1.90	1.86	1.83	1.79
.84	2.22	2.16	2.12	2.07	2.03	1.98	1.94	1.90	1.87	1.83
.85	2.27	2.22	2.17	2.12	2.08	2.03	1.99	1.96	1.92	1.88
.86	2.31	2.26	2.21	2.16	2.12	2.07	2.03	2.00	1.96	1.92
.87	2.36	2.30	2.26	2.21	2.17	2.12	2.09	2.04	2.01	1.97
.88	2.40	2.35	2.30	2.36	2.22	2.16	2.12	2.09	2.06	2.02
.89	2.46	2.40	2.36	2.31	2.27	2.22	2.18	2.14	2.11	2.07
.90	2.51	2.46	2.41	2.36	2.32	2.27	2.23	2.20	2.16	2.12
.91	2.57	2.52	2.47	2.42	2.38	2.33	2.29	2.26	2.22	2.18
.92	2.63	2.58	2.53	2.48	2.44	2.39	2.35	2.32	2.28	2.24
.93	2.70	2.64	2.60	2.55	2.51	2.46	2.42	2.38	2.35	2.31
.94	2.78	2.72	2.68	2.63	2.59	2.54	2.50	2.46	2.49	2.39
.95	2.87	2.82	2.77	2.72	2.68	2.63	2.59	2.56	2.52	2.48
.96	2.98	2.92	2.88	2.83	2.79	2.74	2.70	2.66	2.63	2.59
.97	3.11	3.06	3.01	2.96	2.92	2.87	2.83	2.80	2.76	2.72
.98	3.28	3.22	3.18	3.13	3.09	3.04	3.00	2.96	2.93	2.89
.99	3.55	3.50	3.45	3.40	3.36	3.31	3.27	3.24	3.20	3.16

Таблица I (продолжение)

$p(S/n)$.21 .22 .23 .24 .25 .26 .27 .28 .29 .30

$p(S/s)$

.01	—1.52	—1.55	—1.58	—1.62	—1.64	—1.68	—1.71	—1.74	—1.76	—1.80
.02	—1.24	—1.28	—1.31	—1.34	—1.38	—1.41	—1.44	—1.47	—1.50	—1.52
.03	—1.08	—1.11	—1.14	—1.18	—1.20	—1.24	—1.27	—1.30	—1.32	—1.50
.04	— .94	— .98	—1.01	—1.04	—1.08	—1.11	—1.14	—1.17	—1.20	—1.22
.05	— .84	— .87	— .90	— .94	— .96	—1.00	—1.03	—1.06	—1.08	—1.12
.06	— .74	— .78	— .81	— .84	— .88	— .91	— .94	— .97	—1.00	—1.02
.07	— .66	— .70	— .73	— .76	— .80	— .83	— .86	— .89	— .92	— .94
.08	— .60	— .63	— .66	— .70	— .72	— .76	— .79	— .82	— .84	— .88
.09	— .54	— .57	— .60	— .64	— .66	— .70	— .73	— .76	— .78	— .82
.10	— .48	— .51	— .54	— .58	— .60	— .64	— .67	— .70	— .72	— .76
.11	— .46	— .46	— .49	— .52	— .56	— .59	— .62	— .65	— .68	— .70
.12	— .37	— .40	— .44	— .47	— .50	— .54	— .56	— .60	— .62	— .65
.13	— .32	— .36	— .39	— .42	— .46	— .49	— .52	— .55	— .58	— .60
.14	— .28	— .31	— .34	— .38	— .40	— .44	— .47	— .50	— .52	— .56
.15	— .24	— .27	— .30	— .34	— .36	— .40	— .43	— .46	— .48	— .52
.16	— .18	— .22	— .25	— .28	— .32	— .35	— .38	— .41	— .44	— .46
.17	— .14	— .18	— .21	— .24	— .28	— .30	— .34	— .37	— .40	— .42
.18	— .11	— .14	— .18	— .21	— .24	— .28	— .30	— .34	— .36	— .39
.19	— .08	— .11	— .14	— .18	— .20	— .24	— .27	— .30	— .32	— .36
.20	— .04	— .07	— .10	— .14	— .16	— .20	— .23	— .26	— .28	— .32
.21	0	— .04	— .06	— .10	— .13	— .16	— .20	— .22	— .25	— .28
.22	— .04	0	— .03	— .06	— .10	— .13	— .16	— .19	— .22	— .24
.23	.06	.03	0	— .04	— .06	— .10	— .13	— .16	— .18	— .22
.24	.10	.06	.04	0	— .03	— .06	— .10	— .12	— .15	— .18
.25	.13	.10	.06	.03	0	— .04	— .06	— .10	— .12	— .15
.26	.16	.13	.10	.06	.04	0	— .03	— .06	— .08	— .12
.27	.20	.16	.13	.10	.06	.03	0	— .03	— .06	— .08
.28	.22	.19	.16	.12	.10	.06	.03	0	— .02	— .06
.29	.25	.20	.18	.15	.12	.08	.06	.02	0	— .03
.30	.28	.24	.22	.18	.15	.12	.08	.06	.03	0
.31	.30	.26	.24	.20	.17	.14	.10	.08	.05	.02
.32	.34	.30	.27	.24	.20	.17	.14	.11	.08	.06
.33	.36	.33	.30	.26	.24	.20	.17	.14	.12	.08
.34	.40	.36	.33	.30	.26	.23	.20	.17	.14	.12
.35	.42	.38	.36	.32	.29	.26	.22	.20	.17	.14
.36	.44	.41	.38	.34	.32	.28	.25	.22	.20	.16
.37	.48	.44	.41	.38	.34	.31	.28	.25	.22	.20
.38	.50	.46	.44	.40	.37	.34	.30	.28	.25	.22
.39	.52	.49	.46	.42	.40	.36	.33	.30	.28	.24
.40	.55	.52	.48	.45	.42	.38	.36	.32	.30	.27
.41	.58	.54	.51	.48	.44	.41	.38	.35	.32	.30
.42	.60	.57	.54	.50	.48	.44	.41	.38	.36	.32
.43	.62	.59	.56	.52	.50	.46	.43	.40	.38	.34
.44	.66	.62	.59	.56	.52	.49	.46	.43	.40	.38
.45	.68	.64	.61	.58	.54	.51	.48	.45	.42	.40
.46	.70	.67	.64	.60	.58	.54	.51	.48	.46	.42
.47	.73	.70	.66	.63	.60	.56	.54	.50	.48	.45
.48	.76	.72	.69	.66	.62	.59	.56	.53	.50	.48
.49	.78	.74	.72	.68	.65	.62	.58	.56	.53	.50
.50	.80	.77	.74	.70	.68	.64	.61	.58	.56	.52

Т а б л и ц а 1 (продолжение)

$p(S/n)$	.21	.22	.23	.24	.25	.26	.27	.28	.29	.30
$p(S/s)$										
.51	.83	.80	.76	.73	.70	.66	.64	.60	.58	.55
.52	.86	.82	.79	.76	.72	.69	.66	.63	.60	.58
.53	.88	.84	.82	.78	.75	.72	.68	.66	.63	.60
.54	.90	.87	.84	.80	.78	.74	.71	.68	.66	.62
.55	.94	.90	.87	.84	.80	.77	.74	.71	.68	.66
.56	.96	.92	.89	.86	.82	.79	.76	.73	.70	.68
.57	.98	.95	.92	.88	.82	.82	.79	.76	.74	.70
.58	1.00	.97	.94	.90	.88	.84	.81	.78	.76	.72
.59	1.04	1.00	.97	.94	.90	.87	.84	.81	.78	.76
.60	1.06	1.02	1.00	.96	.93	.90	.86	.84	.81	.78
.61	1.08	1.05	1.02	.98	.96	.92	.89	.86	.84	.80
.62	1.11	1.08	1.04	1.01	.98	.94	.92	.88	.86	.83
.63	1.14	1.10	1.07	1.04	1.00	.97	.94	.91	.88	.86
.64	1.16	1.13	1.10	1.06	1.04	1.00	.97	.94	.92	.88
.65	1.19	1.16	1.12	1.09	1.06	1.02	1.00	.96	.94	.91
.66	1.22	1.18	1.15	1.12	1.08	1.05	1.02	.99	.96	.94
.67	1.24	1.21	1.18	1.14	1.12	1.08	1.05	1.02	1.00	.96
.68	1.24	1.24	1.21	1.18	1.14	1.11	1.05	1.05	1.02	1.00
.69	1.31	1.28	1.24	1.21	1.18	1.14	1.12	1.08	1.06	1.03
.70	1.33	1.30	1.26	1.23	1.20	1.16	1.14	1.10	1.08	1.05
.71	1.36	1.32	1.30	1.26	1.23	1.20	1.16	1.14	1.11	1.08
.72	1.38	1.35	1.32	1.28	1.26	1.22	1.19	1.16	1.14	1.10
.73	1.42	1.38	1.35	1.32	1.28	1.25	1.22	1.19	1.16	1.14
.74	1.44	1.41	1.38	1.34	1.32	1.28	1.25	1.22	1.20	1.16
.75	1.48	1.44	1.42	1.38	1.35	1.32	1.28	1.26	1.23	1.20
.76	1.51	1.48	1.44	1.41	1.38	1.34	1.32	1.28	1.26	1.23
.77	1.54	1.51	1.48	1.44	1.42	1.38	1.35	1.32	1.30	1.26
.78	1.58	1.54	1.51	1.48	1.44	1.41	1.38	1.35	1.32	1.30
.79	1.61	1.58	1.54	1.51	1.48	1.44	1.42	1.38	1.36	1.33
.80	1.64	1.61	1.58	1.54	1.52	1.48	1.45	1.42	1.40	1.36
.81	1.68	1.65	1.62	1.58	1.56	1.52	1.49	1.46	1.44	1.40
.82	1.72	1.68	1.66	1.62	1.59	1.56	1.52	1.50	1.47	1.44
.83	1.76	1.72	1.69	1.66	1.62	1.59	1.56	1.53	1.50	1.48
.84	1.80	1.76	1.73	1.70	1.66	1.63	1.60	1.57	1.54	1.52
.85	1.84	1.81	1.78	1.74	1.72	1.68	1.65	1.62	1.60	1.56
.86	1.88	1.85	1.82	1.78	1.76	1.72	1.69	1.66	1.64	1.60
.87	1.94	1.90	1.87	1.84	1.80	1.77	1.74	1.71	1.68	1.66
.88	1.98	1.94	1.92	1.88	1.85	1.82	1.78	1.76	1.73	1.70
.89	2.04	2.00	1.97	1.94	1.90	1.87	1.84	1.81	1.78	1.76
.90	2.08	2.05	2.02	1.98	1.96	1.92	1.89	1.86	1.84	1.80
.91	2.14	2.11	2.08	2.04	2.02	1.98	1.95	1.92	1.90	1.86
.92	2.20	2.17	2.14	2.10	2.08	2.04	2.01	1.98	1.96	1.92
.93	2.28	2.24	2.21	2.18	2.14	2.11	2.08	2.05	2.02	2.00
.94	2.36	2.32	2.29	2.26	2.22	2.19	2.16	2.13	2.10	2.08
.95	2.44	2.41	2.38	2.34	2.32	2.28	2.25	2.22	2.20	2.16
.96	2.56	2.52	2.49	2.46	2.42	2.39	2.36	2.33	2.30	2.28
.97	2.68	2.65	2.62	2.58	2.56	2.52	2.49	2.46	2.44	2.40
.98	2.86	2.82	2.79	2.76	2.72	2.69	2.65	2.63	2.60	2.58
.99	3.12	3.09	3.06	3.02	3.00	2.96	2.93	2.90	2.88	2.84

Таблица I (продолжение)

$p(S/n)$	.31	.32	.33	.34	.35	.36	.37	.38	.39	.40
$p(S/s)$										
.01	-1.82	-1.85	-1.88	-1.91	-1.94	-1.96	-1.99	-2.02	-2.04	-2.06
.02	-1.54	-1.58	-1.61	-1.64	-1.66	-1.69	-1.72	-1.74	-1.77	-1.80
.03	-1.38	-1.41	-1.44	-1.47	-1.50	-1.52	-1.55	-1.58	-1.60	-1.62
.04	-1.24	-1.28	-1.31	-1.33	-1.36	-1.39	-1.42	-1.44	-1.47	-1.50
.05	-1.14	-1.17	-1.20	-1.23	-1.26	-1.28	-1.31	-1.34	-1.36	-1.38
.06	-1.04	-1.08	-1.11	-1.14	-1.16	-1.19	-1.22	-1.24	-1.27	-1.30
.07	-.96	-1.00	-1.03	-1.06	-1.08	-1.11	-1.14	-1.16	-1.19	-1.22
.08	-.90	-.93	-.96	-.99	-1.02	-1.04	-1.07	-1.10	-1.12	-1.14
.09	-.84	-.87	-.90	-.93	-.96	-.98	-1.01	-1.04	-1.06	-1.08
.10	-.78	-.81	-.84	-.87	-.90	-.92	-.95	-.98	-1.00	-1.02
.11	-.72	-.76	-.79	-.82	-.84	-.87	-.90	-.92	-.95	-.98
.12	-.67	-.70	-.74	-.76	-.79	-.82	-.84	-.87	-.90	-.92
.13	-.62	-.66	-.69	-.72	-.74	-.77	-.80	-.82	-.85	-.88
.14	-.58	-.61	-.64	-.67	-.70	-.72	-.75	-.78	-.80	-.82
.15	-.54	-.57	-.60	-.63	-.66	-.68	-.71	-.74	-.76	-.78
.16	-.48	-.52	-.55	-.58	-.60	-.63	-.66	-.68	-.71	-.74
.17	-.44	-.48	-.51	-.54	-.56	-.69	-.62	-.64	-.67	-.70
.18	-.41	-.44	-.48	-.50	-.53	-.56	-.58	-.61	-.64	-.66
.19	-.38	-.41	-.44	-.47	-.50	-.52	-.55	-.58	-.60	-.62
.20	-.34	-.37	-.40	-.43	-.46	-.48	-.51	-.54	-.56	-.58
.21	-.30	-.34	-.36	-.40	-.42	-.44	-.48	-.50	-.52	-.55
.22	-.26	-.30	-.33	-.36	-.38	-.41	-.44	-.46	-.49	-.52
.23	-.24	-.27	-.30	-.33	-.36	-.38	-.41	-.44	-.46	-.48
.24	-.20	-.24	-.26	-.30	-.32	-.34	-.38	-.40	-.42	-.45
.25	-.17	-.20	-.24	-.26	-.29	-.32	-.34	-.37	-.40	-.42
.26	-.14	-.17	-.20	-.23	-.26	-.28	-.31	-.34	-.36	-.38
.27	-.10	-.14	-.17	-.20	-.22	-.25	-.28	-.30	-.33	-.36
.28	-.08	-.11	-.14	-.17	-.20	-.22	-.25	-.28	-.30	-.32
.29	-.05	-.08	-.12	-.14	-.17	-.20	-.22	-.25	-.28	-.30
.30	-.02	-.06	-.08	-.12	-.14	-.16	-.20	-.22	-.24	-.27
.31	.0	.04	.06	.10	.12	.14	.18	.20	.22	.25
.32	.04	0	.03	.06	.08	.11	.14	.16	.19	.22
.33	.06	.03	0	.03	.06	.08	.11	.14	.16	.18
.34	.10	.06	.03	0	.02	.05	.08	.10	.13	.16
.35	.12	.08	.06	.02	0	.02	.06	.08	.10	.13
.36	.14	.11	.08	.05	.02	0	.03	.06	.08	.10
.37	.18	.14	.11	.08	.06	.03	0	.02	.05	.08
.38	.20	.16	.14	.10	.08	.06	.02	0	.02	.05
.39	.22	.19	.16	.13	.10	.08	.05	.02	0	.02
.40	.25	.22	.18	.16	.13	.10	.08	.05	.02	0
.41	.28	.24	.21	.18	.16	.13	.10	.08	.05	.02
.42	.30	.27	.24	.21	.18	.16	.13	.10	.08	.06
.43	.32	.29	.26	.23	.20	.18	.15	.12	.10	.08
.44	.36	.32	.29	.26	.24	.21	.18	.16	.13	.10
.45	.38	.34	.31	.28	.26	.23	.20	.18	.15	.12
.46	.40	.37	.34	.31	.28	.26	.23	.20	.18	.16
.47	.43	.40	.36	.34	.31	.28	.26	.23	.20	.18
.48	.46	.42	.39	.36	.34	.38	.28	.26	.23	.20
.49	.48	.44	.42	.38	.36	.34	.30	.28	.26	.23
.50	.50	.47	.44	.41	.38	.36	.33	.30	.28	.26

Таблица 1 (продолжение)

$p(S/n)$	.31	.32.	.33	.34	.35	.36	.37	.38	.39	.40
$p(S/s)$										
.51	.53	.50	.46	.44	.41	.38	.36	.23	.30	.28
.52	.56	.52	.49	.46	.44	.41	.38	.36	.33	.30
.53	.58	.54	.52	.48	.46	.44	.40	.38	.36	.33
.54	.60	.57	.54	.51	.48	.46	.43	.40	.38	.36
.55	.64	.60	.57	.54	.52	.49	.46	.44	.41	.38
.56	.66	.62	.59	.56	.54	.51	.48	.46	.43	.40
.57	.68	.65	.62	.59	.56	.54	.51	.48	.46	.44
.58	.70	.67	.64	.61	.58	.56	.53	.50	.48	.46
.59	.74	.70	.67	.64	.62	.59	.56	.54	.51	.48
.60	.76	.72	.79	.66	.64	.62	.58	.56	.54	.51
.61	.78	.75	.72	.69	.66	.64	.61	.58	.56	.54
.62	.81	.78	.74	.72	.69	.66	.64	.61	.58	.56
.63	.84	.80	.77	.74	.72	.69	.66	.64	.61	.58
.64	.86	.83	.80	.77	.74	.72	.69	.66	.64	.62
.65	.89	.86	.82	.80	.77	.74	.72	.69	.66	.64
.66	.92	.98	.85	.82	.80	.77	.74	.72	.69	.66
.67	.94	.91	.88	.85	.82	.80	.77	.74	.72	.70
.68	.98	.94	.91	.88	.86	.83	.80	.78	.75	.72
.69	1.01	.98	.94	.92	.89	.86	.84	.81	.78	.76
.70	1.03	1.00	.96	.94	.91	.88	.86	.83	.80	.78
.71	1.06	1.02	1.00	.96	.94	.92	.88	.86	.84	.81
.72	1.08	1.05	1.02	.99	.96	.94	.91	.88	.86	.84
.73	1.12	1.08	1.05	1.02	1.00	.97	.94	.92	.89	.86
.74	1.14	1.11	1.14	1.05	1.02	1.00	.97	.94	.92	.90
.75	1.18	1.14	1.12	1.08	1.06	1.04	1.00	.98	.96	.93
.76	1.21	1.18	1.14	1.12	1.09	1.06	1.04	1.01	.98	.96
.77	1.24	1.21	1.18	1.15	1.12	1.10	1.07	1.04	1.02	1.00
.78	1.28	1.24	1.21	1.18	1.16	1.13	1.10	1.08	1.05	1.02
.79	1.31	1.28	1.24	1.22	1.19	1.16	1.14	1.11	1.08	1.06
.80	1.34	1.31	1.28	1.25	1.22	1.20	1.17	1.14	1.12	1.10
.81	1.38	1.35	1.32	1.29	1.26	1.24	1.21	1.18	1.16	1.14
.82	1.42	1.38	1.36	1.32	1.30	1.28	1.24	1.22	1.20	1.17
.83	1.46	1.42	1.39	1.36	1.34	1.31	1.28	1.26	1.23	1.20
.84	1.50	1.46	1.43	1.40	1.38	1.35	1.32	1.30	1.27	1.24
.85	1.54	1.51	1.48	1.45	1.42	1.40	1.37	1.34	1.32	1.30
.86	1.58	1.55	1.52	1.49	1.46	1.44	1.41	1.38	1.36	1.34
.87	1.64	1.60	1.57	1.54	1.52	1.49	1.46	1.44	1.41	1.38
.88	1.68	1.64	1.62	1.58	1.56	1.54	1.50	1.48	1.46	1.43
.89	1.74	1.70	1.67	1.64	1.62	1.59	1.56	1.54	1.51	1.48
.90	1.78	1.75	1.72	1.69	1.66	1.64	1.61	1.58	1.56	1.54
.91	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72	1.70	1.67	1.64	1.62	1.60
.92	1.90	1.87	1.84	1.81	1.78	1.76	1.73	1.70	1.68	1.66
.93	1.98	1.94	1.91	1.88	1.86	1.83	1.80	1.78	1.75	1.72
.94	2.06	2.02	1.99	1.96	1.94	1.91	1.88	1.86	1.83	1.80
.95	2.14	2.11	2.08	2.05	2.02	2.00	1.97	1.94	1.92	1.90
.96	2.26	2.22	2.19	2.16	2.14	2.11	2.08	2.06	2.03	2.00
.97	2.38	2.35	2.32	2.29	2.26	2.24	2.21	2.18	2.16	2.14
.98	2.56	2.52	2.49	2.46	2.44	2.41	2.38	2.36	2.33	2.30
.99	2.82	2.79	2.76	2.73	2.70	2.68	2.65	2.62	2.60	2.58

Таблица I (продолжение)

$p(S/n)$	.41	.42	.43	.44	.45	.46	.47	.48	.49	.50
$p(S/s)$										
.01	-.2.09	-.2.12	-.2.14	-.2.17	-.2.19	-.2.22	-.2.24	-.2.27	-.2.30	-.2.32
.02	-.1.82	-.1.85	-.1.87	-.1.90	-.1.92	-.1.95	-.1.98	-.2.00	-.2.02	-.2.05
.03	-.1.65	-.1.68	-.1.70	-.1.73	-.1.75	-.1.78	-.1.80	-.1.83	-.1.86	-.1.88
.04	-.1.52	-.1.55	-.1.57	-.1.60	-.1.62	-.1.65	-.1.68	-.1.70	-.1.72	-.1.75
.05	-.1.41	-.1.44	-.1.46	-.1.49	-.1.51	-.1.54	-.1.56	-.1.59	-.1.62	-.1.64
.06	-.1.32	-.1.35	-.1.37	-.1.40	-.1.42	-.1.45	-.1.48	-.1.50	-.1.52	-.1.55
.07	-.1.24	-.1.27	-.1.29	-.1.32	-.1.34	-.1.37	-.1.40	-.1.42	-.1.44	-.1.47
.08	-.1.17	-.1.20	-.1.22	-.1.25	-.1.27	-.1.30	-.1.32	-.1.35	-.1.38	-.1.40
.09	-.1.11	-.1.14	-.1.16	-.1.19	-.1.21	-.1.24	-.1.26	-.1.29	-.1.32	-.1.34
.10	-.1.05	-.1.08	-.1.10	-.1.13	-.1.15	-.1.18	-.1.20	-.1.23	-.1.26	-.1.28
.11	-.1.00	-.1.03	-.1.05	-.1.08	-.1.10	-.1.13	-.1.16	-.1.18	-.1.20	-.1.23
.12	-.94	-.98	-.1.00	-.1.02	-.1.04	-.1.08	-.1.10	-.1.12	-.1.15	-.1.18
.13	-.90	-.93	-.95	-.98	-.1.00	-.1.03	-.1.06	-.1.08	-.1.10	-.1.13
.14	-.85	-.88	-.90	-.93	-.95	-.98	-.1.00	-.1.03	-.1.06	-.1.08
.15	-.81	-.84	-.86	-.89	-.91	-.94	-.96	-.99	-.1.02	-.1.04
.16	-.76	-.79	-.81	-.84	-.86	-.89	-.92	-.94	-.96	-.99
.17	-.72	-.75	-.77	-.80	-.82	-.85	-.88	-.90	-.92	-.95
.18	-.68	-.72	-.74	-.76	-.78	-.82	-.84	-.86	-.89	-.92
.19	-.65	-.68	-.70	-.73	-.75	-.78	-.80	-.83	-.86	-.88
.20	-.61	-.64	-.66	-.69	-.71	-.74	-.79	-.70	-.82	-.84
.21	-.58	-.60	-.62	-.66	-.68	-.70	-.73	-.76	-.78	-.80
.22	-.54	-.57	-.59	-.62	-.64	-.67	-.70	-.72	-.74	-.77
.23	-.51	-.54	-.56	-.59	-.61	-.64	-.66	-.69	-.72	-.74
.24	-.48	-.50	-.52	-.56	-.58	-.60	-.63	-.66	-.68	-.70
.25	-.44	-.48	-.50	-.52	-.54	-.58	-.60	-.62	-.65	-.68
.26	-.41	-.44	-.46	-.49	-.51	-.54	-.56	-.59	-.62	-.64
.27	-.38	-.41	-.43	-.46	-.48	-.51	-.54	-.56	-.58	-.61
.28	-.35	-.38	-.40	-.43	-.45	-.48	-.50	-.53	-.56	-.58
.29	-.32	-.36	-.38	-.40	-.42	-.46	-.48	-.50	-.53	-.56
.30	-.30	-.32	-.34	-.38	-.40	-.42	-.45	-.48	-.50	-.52
.31	-.28	-.30	-.32	-.36	-.38	-.40	-.43	-.46	-.48	-.50
.32	-.24	-.27	-.29	-.32	-.34	-.37	-.40	-.49	-.44	-.47
.33	-.21	-.24	-.26	-.29	-.31	-.34	-.36	-.39	-.42	-.44
.34	-.18	-.21	-.23	-.26	-.28	-.31	-.34	-.36	-.38	-.41
.35	-.16	-.18	-.20	-.24	-.26	-.28	-.31	-.34	-.36	-.38
.36	-.13	-.16	-.18	-.21	-.23	-.26	-.28	-.31	-.34	-.36
.37	-.10	-.13	-.15	-.18	-.20	-.23	-.26	-.28	-.30	-.33
.38	-.08	-.10	-.12	-.16	-.18	-.20	-.23	-.26	-.28	-.30
.39	-.05	-.08	-.10	-.13	-.15	-.18	-.20	-.23	-.26	-.28
.40	-.02	-.06	-.08	-.10	-.12	-.16	-.18	-.20	-.23	-.26
.41	0	-.03	-.05	-.08	-.10	-.13	-.16	-.18	-.20	-.23
.42	.03	0	-.02	-.05	-.07	-.10	-.12	-.15	-.18	-.20
.43	.05	.02	0	-.03	-.05	-.08	-.10	-.13	-.16	-.18
.44	.08	.05	.03	0	-.02	-.05	-.08	-.10	-.13	-.15
.45	.10	.07	.05	.02	0	-.03	-.06	-.08	-.10	-.13
.46	.13	.10	.08	.05	.03	0	-.02	-.05	-.08	-.10
.47	.16	.12	.10	.08	.06	.02	0	-.02	-.05	-.08
.48	.18	.15	.13	.10	.08	.05	.02	0	-.02	-.05
.49	.20	.18	.16	.13	.10	.08	.05	.02	0	-.02
.50	.23	.20	.18	.15	.13	.10	.08	.05	.02	0

Таблица I (продолжение)

$p(S/n)$	.41	.42	.43	.44	.45	.46	.47	.48	.49	.50
$p(S/s)$										
.51	.26	.22	.20	.18	.16	.12	.10	.08	.05	.02
.52	.28	.25	.23	.20	.18	.15	.12	.10	.08	.05
.53	.30	.28	.26	.22	.20	.18	.15	.12	.10	.08
.54	.33	.30	.28	.25	.23	.20	.18	.15	.12	.10
.55	.36	.33	.31	.28	.26	.23	.20	.18	.16	.13
.56	.38	.35	.33	.30	.28	.25	.22	.20	.18	.15
.57	.41	.38	.36	.33	.31	.28	.26	.23	.20	.18
.58	.43	.40	.38	.35	.33	.30	.28	.25	.22	.20
.59	.46	.40	.41	.38	.36	.33	.30	.28	.26	.23
.60	.48	.46	.44	.40	.38	.36	.33	.30	.28	.26
.61	.51	.48	.46	.43	.41	.38	.36	.33	.30	.28
.62	.54	.50	.48	.46	.44	.40	.38	.36	.33	.30
.63	.56	.53	.51	.48	.46	.43	.40	.38	.36	.33
.64	.59	.56	.54	.51	.49	.46	.44	.41	.38	.36
.65	.62	.58	.56	.54	.52	.48	.46	.44	.41	.38
.66	.64	.61	.59	.56	.54	.51	.48	.46	.44	.41
.67	.67	.64	.62	.59	.57	.54	.52	.49	.46	.44
.68	.70	.67	.65	.62	.60	.57	.54	.52	.50	.47
.69	.74	.70	.68	.66	.64	.60	.58	.56	.53	.50
.70	.76	.72	.70	.68	.66	.62	.60	.58	.55	.52
.71	.78	.76	.74	.70	.68	.66	.63	.60	.58	.56
.72	.81	.78	.76	.73	.71	.68	.66	.63	.60	.58
.73	.84	.81	.79	.76	.74	.71	.68	.66	.64	.61
.74	.87	.84	.82	.79	.77	.74	.72	.69	.66	.64
.75	.90	.88	.86	.82	.80	.78	.75	.72	.70	.68
.76	.94	.90	.88	.86	.84	.80	.78	.76	.73	.70
.77	.97	.94	.92	.89	.87	.84	.82	.79	.76	.74
.78	1.00	.97	.95	.92	.90	.87	.84	.82	.80	.77
.79	1.04	1.00	.98	.96	.94	.90	.88	.86	.83	.80
.80	1.07	1.04	1.02	.99	.97	.94	.92	.89	.86	.84
.81	1.11	1.08	1.06	1.03	1.01	.98	.96	.93	.90	.88
.82	1.14	1.12	1.10	1.06	1.04	1.02	.99	.96	.94	.92
.83	1.18	1.15	1.13	1.10	1.08	1.05	1.02	1.00	.98	.95
.84	1.22	1.19	1.17	1.14	1.12	1.09	1.06	1.04	1.02	.99
.85	1.27	1.24	1.22	1.19	1.17	1.14	1.12	1.09	1.06	1.04
.86	1.31	1.28	1.26	1.23	1.21	1.18	1.16	1.13	1.10	1.08
.87	1.36	1.33	1.31	1.28	1.26	1.23	1.20	1.18	1.16	1.13
.88	1.40	1.38	1.36	1.32	1.30	1.28	1.25	1.22	1.20	1.18
.89	1.46	1.43	1.41	1.38	1.36	1.33	1.30	1.28	1.26	1.23
.90	1.51	1.48	1.46	1.43	1.41	1.38	1.36	1.33	1.30	1.28
.91	1.57	1.54	1.52	1.49	1.47	1.44	1.42	1.39	1.36	1.34
.92	1.63	1.60	1.58	1.55	1.53	1.50	1.48	1.45	1.42	1.40
.93	1.70	1.67	1.65	1.62	1.60	1.57	1.54	1.52	1.50	1.47
.94	1.78	1.75	1.73	1.70	1.68	1.65	1.62	1.60	1.58	1.55
.95	1.87	1.84	1.82	1.79	1.77	1.74	1.72	1.69	1.66	1.64
.96	1.98	1.95	1.93	1.90	1.88	1.85	1.82	1.80	1.78	1.75
.97	2.11	2.08	2.06	2.03	2.01	1.98	1.96	1.93	1.90	1.88
.98	2.28	2.25	2.23	2.20	2.18	2.15	2.12	2.10	2.08	2.05
.99	2.55	2.52	2.50	2.47	2.45	2.42	2.48	2.37	2.34	2.32

Таблица I (продолжение)

$p(S/n)$	.51	.52	.53	.54	.55	.56	.57	.58	.59	.60
$p(S/s)$										
.01	-2.31	-2.37	-2.40	-2.42	-2.45	-2.47	-2.50	-2.52	-2.55	-2.58
.02	-2.08	-2.10	-2.12	-2.15	-2.18	-2.20	-2.23	-2.25	-2.28	-2.30
.03	-1.90	-1.93	-1.96	-1.98	-2.01	-2.03	-2.06	-2.08	-2.11	-2.14
.04	-1.78	-1.80	-1.82	-1.85	-1.88	-1.90	-1.93	-1.95	-1.98	-2.00
.05	-1.66	-1.69	-1.72	-1.74	-1.77	-1.79	-1.82	-1.84	-1.87	-1.90
.06	-1.58	-1.60	-1.62	-1.65	-1.68	-1.70	-1.73	-1.75	-1.78	-1.80
.07	-1.50	-1.52	-1.54	-1.57	-1.60	-1.62	-1.65	-1.67	-1.70	-1.72
.08	-1.42	-1.45	-1.48	-1.50	-1.53	-1.55	-1.58	-1.60	-1.63	-1.66
.09	-1.36	-1.39	-1.42	-1.44	-1.47	-1.49	-1.52	-1.54	-1.57	-1.60
.10	-1.30	-1.33	-1.36	-1.38	-1.41	-1.43	-1.46	-1.48	-1.51	-1.54
.11	-1.26	-1.28	-1.30	-1.33	-1.36	-1.38	-1.41	-1.43	-1.46	-1.48
.12	-1.20	-1.22	-1.25	-1.28	-1.30	-1.32	-1.36	-1.38	-1.40	-1.43
.13	-1.16	-1.18	-1.20	-1.23	-1.26	-1.28	-1.31	-1.33	-1.36	-1.38
.14	-1.10	-1.13	-1.16	-1.18	-1.21	-1.23	-1.26	-1.28	-1.31	-1.34
.15	-1.06	-1.09	-1.12	-1.14	-1.17	-1.19	-1.22	-1.24	-1.27	-1.30
.16	-1.02	-1.04	-1.06	-1.09	-1.12	-1.14	-1.17	-1.19	-1.22	-1.24
.17	-.98	-1.00	-1.02	-1.05	-1.08	-1.10	-1.13	-1.15	-1.18	-1.20
.18	-.94	-.96	-.99	-1.02	-1.04	-1.06	-1.10	-1.12	-1.14	-1.17
.19	-.90	-.93	-.96	-.98	-1.01	-1.03	-1.06	-1.08	-1.11	-1.14
.20	-.86	-.89	-.92	-.94	-.97	-.99	-1.02	-1.04	-1.07	-1.10
.21	-.83	-.86	-.88	-.90	-.94	-.96	-.98	-1.00	-1.04	-1.06
.22	-.80	-.82	-.84	-.87	-.90	-.92	-.95	-.97	-1.00	-1.02
.23	-.76	-.79	-.82	-.84	-.87	-.89	-.92	-.94	-.97	-1.00
.24	-.73	-.76	-.78	-.80	-.84	-.86	-.88	-.90	-.94	-.96
.25	-.70	-.72	-.75	-.78	-.80	-.82	-.86	-.88	-.90	-.93
.26	-.66	-.69	-.72	-.74	-.77	-.79	-.82	-.84	-.87	-.90
.27	-.64	-.66	-.68	-.71	-.74	-.76	-.79	-.81	-.84	-.86
.28	-.60	-.63	-.66	-.68	-.71	-.73	-.76	-.78	-.81	-.84
.29	-.58	-.60	-.63	-.66	-.68	-.70	-.74	-.76	-.78	-.81
.30	-.55	-.58	-.60	-.62	-.66	-.68	-.70	-.72	-.76	-.78
.31	-.53	-.56	-.58	-.60	-.64	-.66	-.68	-.70	-.74	-.76
.32	-.50	-.52	-.54	-.57	-.60	-.62	-.65	-.67	-.70	-.72
.33	-.46	-.49	-.52	-.54	-.57	-.59	-.62	-.64	-.67	-.70
.34	-.44	-.46	-.48	-.51	-.54	-.56	-.59	-.61	-.64	-.66
.35	-.41	-.44	-.46	-.48	-.52	-.54	-.56	-.58	-.62	-.64
.36	-.38	-.41	-.44	-.46	-.49	-.51	-.54	-.56	-.59	-.62
.37	-.36	-.38	-.40	-.43	-.46	-.48	-.51	-.53	-.56	-.58
.38	-.33	-.36	-.38	-.40	-.44	-.46	-.48	-.50	-.54	-.56
.39	-.30	-.33	-.36	-.38	-.41	-.43	-.46	-.48	-.51	-.54
.40	-.28	-.30	-.33	-.36	-.38	-.40	-.44	-.46	-.48	-.51
.41	-.26	-.28	-.30	-.33	-.36	-.38	-.41	-.43	-.46	-.48
.42	-.22	-.25	-.28	-.30	-.33	-.35	-.38	-.40	-.43	-.46
.43	-.20	-.23	-.26	-.28	-.31	-.33	-.36	-.38	-.41	-.44
.44	-.18	-.20	-.22	-.25	-.28	-.30	-.33	-.35	-.38	-.40
.45	-.16	-.18	-.20	-.23	-.26	-.28	-.31	-.33	-.36	-.38
.46	-.12	-.15	-.18	-.20	-.23	-.25	-.28	-.30	-.33	-.36
.47	-.10	-.12	-.15	-.18	-.20	-.22	-.26	-.28	-.30	-.33
.48	-.08	-.10	-.12	-.15	-.18	-.20	-.23	-.25	-.28	-.30
.49	-.05	-.08	-.10	-.12	-.16	-.18	-.20	-.22	-.26	-.28
.50	-.02	-.05	-.08	-.10	-.13	-.15	-.18	-.20	-.23	-.26

Таблица I (продолжение)

$p(S/n)$	$p(S/s)$									
	.51	.52	.53	.54	.55	.56	.57	.58	.59	.60
.51	0	-.02	-.05	-.08	-.10	-.12	-.16	-.18	-.20	-.23
.52	.02	0	-.02	-.05	-.08	-.10	-.13	-.15	-.18	-.20
.53	.05	.02	0	-.02	-.06	-.08	-.10	-.12	-.16	-.18
.54	.08	.05	.02	0	-.03	-.05	-.08	-.10	-.13	-.16
.55	.10	.08	.06	.03	0	-.02	-.05	-.07	-.10	-.12
.56	.12	.10	.08	.05	.02	0	-.03	-.05	-.08	-.10
.57	.16	.13	.10	.08	.05	.03	0	-.02	-.03	-.08
.58	.18	.15	.12	.10	.07	.05	.02	0	-.03	-.06
.59	.20	.18	.16	.13	.10	.08	.05	.03	0	-.02
.60	.23	.20	.18	.16	.12	.10	.08	.06	.02	0
.61	.26	.23	.20	.18	.15	.13	.10	.08	.05	.02
.62	.28	.26	.23	.20	.18	.16	.12	.10	.08	.05
.63	.30	.28	.26	.23	.20	.18	.15	.13	.10	.08
.64	.34	.31	.28	.26	.23	.21	.18	.16	.13	.10
.65	.36	.34	.31	.28	.26	.24	.20	.18	.16	.13
.66	.38	.36	.34	.31	.28	.26	.23	.21	.18	.16
.67	.42	.39	.36	.34	.31	.29	.26	.24	.21	.18
.68	.44	.42	.40	.37	.34	.32	.29	.27	.24	.22
.69	.48	.46	.43	.40	.38	.36	.32	.30	.28	.25
.70	.50	.48	.45	.42	.40	.38	.34	.32	.30	.27
.71	.53	.50	.48	.46	.42	.40	.38	.36	.32	.30
.72	.56	.53	.50	.48	.45	.43	.40	.38	.35	.32
.73	.58	.56	.54	.51	.48	.46	.43	.41	.38	.36
.74	.62	.59	.56	.54	.51	.49	.46	.44	.41	.38
.75	.65	.62	.60	.58	.54	.52	.50	.48	.44	.42
.76	.68	.66	.63	.60	.58	.56	.52	.50	.48	.45
.77	.72	.69	.66	.64	.61	.59	.56	.54	.51	.48
.78	.74	.72	.70	.67	.64	.62	.59	.57	.54	.52
.79	.78	.76	.73	.70	.68	.66	.62	.60	.58	.55
.80	.82	.79	.76	.74	.71	.69	.66	.64	.61	.58
.81	.86	.83	.80	.78	.75	.73	.70	.68	.65	.62
.82	.89	.86	.84	.82	.78	.76	.74	.72	.68	.66
.83	.92	.90	.88	.85	.82	.80	.77	.75	.72	.70
.84	.96	.94	.92	.89	.86	.84	.81	.79	.76	.74
.85	1.02	.99	.96	.94	.91	.89	.86	.84	.81	.78
.86	1.06	1.03	1.00	.98	.95	.93	.90	.88	.85	.82
.87	1.10	1.08	1.06	1.03	1.00	.98	.95	.93	.90	.88
.88	1.15	1.12	1.10	1.08	1.04	1.02	1.00	.98	.94	.92
.89	1.20	1.18	1.16	1.13	1.10	1.08	1.05	1.03	1.00	.98
.90	1.26	1.23	1.20	1.18	1.15	1.13	1.10	1.08	1.05	1.02
.91	1.32	1.29	1.26	1.24	1.21	1.19	1.16	1.14	1.11	1.08
.92	1.38	1.35	1.32	1.30	1.27	1.25	1.22	1.20	1.17	1.14
.93	1.44	1.42	1.40	1.37	1.34	1.32	1.29	1.27	1.24	1.22
.94	1.52	1.50	1.48	1.45	1.42	1.40	1.37	1.35	1.32	1.30
.95	1.62	1.59	1.56	1.54	1.51	1.49	1.46	1.44	1.41	1.38
.96	1.72	1.70	1.68	1.65	1.62	1.60	1.57	1.55	1.52	1.50
.97	1.86	1.83	1.80	1.78	1.75	1.73	1.70	1.68	1.65	1.62
.98	2.02	2.00	1.98	1.95	1.92	1.90	1.87	1.85	1.82	1.80
.99	2.30	2.27	2.24	2.22	2.19	2.17	2.14	2.12	2.09	2.06

Таблица I (продолжение)

$p(S/n)$	$p(S/s)$									
	.61	.62	.63	.64	.65	.66	.67	.68	.69	.70
.01	-2.60	-2.62	-2.65	-2.68	-2.70	-2.73	-2.76	-2.79	-2.82	-2.84
.02	-2.33	-2.36	-2.38	-2.41	-2.44	-2.46	-2.49	-2.52	-2.56	-2.58
.03	-2.16	-2.18	-2.21	-2.24	-2.26	-2.29	-2.32	-2.35	-2.38	-2.40
.04	-2.03	-2.06	-2.08	-2.11	-2.14	-2.16	-2.19	-2.22	-2.26	-2.28
.05	-1.92	-1.94	-1.97	-2.00	-2.02	-2.05	-2.08	-2.11	-2.14	-2.16
.06	-1.83	-1.86	-1.88	-1.91	-1.94	-1.96	-1.99	-2.02	-2.06	-2.08
.07	-1.75	-1.78	-1.80	-1.83	-1.86	-1.88	-1.91	-1.94	-1.98	-2.00
.08	-1.68	-1.70	-1.73	-1.76	-1.78	-1.81	-1.84	-1.87	-1.90	-1.92
.09	-1.62	-1.64	-1.67	-1.70	-1.72	-1.75	-1.78	-1.81	-1.84	-1.86
.10	-1.56	-1.58	-1.61	-1.64	-1.66	-1.69	-1.72	-1.75	-1.78	-1.80
.11	-1.51	-1.54	-1.56	-1.59	-1.62	-1.64	-1.67	-1.70	-1.74	-1.76
.12	-1.46	-1.48	-1.50	-1.54	-1.56	-1.58	-1.62	-1.64	-1.68	-1.70
.13	-1.41	-1.44	-1.46	-1.49	-1.52	-1.54	-1.57	-1.60	-1.64	-1.66
.14	-1.36	-1.38	-1.41	-1.44	-1.46	-1.49	-1.52	-1.55	-1.58	-1.60
.15	-1.32	-1.34	-1.37	-1.40	-1.42	-1.45	-1.48	-1.51	-1.54	-1.56
.16	-1.27	-1.30	-1.32	-1.35	-1.38	-1.40	-1.43	-1.46	-1.50	-1.52
.17	-1.23	-1.26	-1.28	-1.31	-1.34	-1.36	-1.39	-1.42	-1.46	-1.48
.18	-1.20	-1.22	-1.24	-1.28	-1.30	-1.32	-1.36	-1.38	-1.42	-1.44
.19	-1.16	-1.18	-1.21	-1.24	-1.26	-1.29	-1.32	-1.35	-1.38	-1.40
.20	-1.12	-1.14	-1.17	-1.20	-1.22	-1.25	-1.28	-1.31	-1.34	-1.36
.21	-1.08	-1.11	-1.14	-1.16	-1.19	-1.22	-1.24	-1.28	-1.31	-1.33
.22	-1.05	-1.08	-1.10	-1.13	-1.16	-1.18	-1.21	-1.24	-1.28	-1.30
.23	-1.02	-1.04	-1.07	-1.10	-1.12	-1.15	-1.18	-1.21	-1.24	-1.26
.24	-.98	-1.01	-1.04	-1.06	-1.09	-1.12	-1.14	-1.18	-1.21	-1.23
.25	-.96	-.98	-1.00	-1.04	-1.06	-1.08	-1.12	-1.14	-1.18	-1.20
.26	-.92	-.94	-.97	-1.00	-1.02	-1.05	-1.08	-1.11	-1.14	-1.16
.27	-.89	-.92	-.94	-.97	-1.00	-1.02	-1.05	-1.08	-1.12	-1.14
.28	-.86	-.88	-.91	-.94	-.96	-.99	-1.02	-1.05	-1.08	-1.10
.29	-.84	-.86	-.88	-.92	-.94	-.96	-1.00	-1.02	-1.06	-1.08
.30	-.80	-.83	-.86	-.88	-.91	-.94	-.96	-1.00	-1.03	-1.05
.31	-.78	-.81	-.84	-.86	-.89	-.92	-.94	-.98	-1.01	-1.03
.32	-.75	-.78	-.80	-.83	-.86	-.88	-.91	-.94	-.98	-1.00
.33	-.72	-.74	-.77	-.80	-.82	-.85	-.88	-.91	-.94	-.96
.34	-.69	-.72	-.74	-.77	-.80	-.82	-.85	-.88	-.92	-.94
.35	-.66	-.69	-.72	-.74	-.77	-.80	-.82	-.86	-.89	-.91
.36	-.64	-.66	-.69	-.72	-.74	-.77	-.80	-.83	-.86	-.88
.37	-.61	-.64	-.66	-.69	-.72	-.74	-.77	-.80	-.84	-.86
.38	-.58	-.61	-.64	-.66	-.69	-.72	-.74	-.78	-.81	-.83
.39	-.56	-.58	-.61	-.64	-.66	-.69	-.72	-.75	-.78	-.80
.40	-.54	-.56	-.58	-.62	-.64	-.66	-.70	-.72	-.76	-.78
.41	-.51	-.54	-.56	-.59	-.62	-.64	-.67	-.70	-.74	-.76
.42	-.48	-.50	-.53	-.56	-.58	-.61	-.64	-.67	-.70	-.72
.43	-.46	-.48	-.51	-.54	-.56	-.59	-.62	-.65	-.68	-.70
.44	-.43	-.46	-.48	-.51	-.54	-.56	-.59	-.62	-.66	-.68
.45	-.41	-.44	-.46	-.49	-.52	-.54	-.57	-.60	-.64	-.66
.46	-.38	-.40	-.43	-.46	-.48	-.51	-.54	-.57	-.60	-.62
.47	-.36	-.38	-.40	-.44	-.46	-.48	-.52	-.54	-.58	-.60
.48	-.33	-.36	-.38	-.41	-.44	-.46	-.49	-.52	-.56	-.58
.49	-.30	-.33	-.36	-.38	-.41	-.44	-.46	-.50	-.53	-.55
.50	-.28	-.30	-.33	-.36	-.38	-.41	-.44	-.47	-.50	-.52

Т а б л и ц а I (продолжение)

$p(S/n)$	$p(S/s)$									
	.61	.62	.63	.64	.65	.66	.67	.68	.69	.70
.51	-.26	-.28	-.30	-.34	-.36	-.38	-.42	-.44	-.48	-.50
.52	-.23	-.26	-.28	-.31	-.34	-.36	-.39	-.42	-.46	-.48
.53	-.20	-.23	-.26	-.28	-.31	-.34	-.36	-.40	-.43	-.45
.54	-.17	-.20	-.23	-.26	-.28	-.31	-.34	-.37	-.40	-.42
.55	-.15	-.18	-.20	-.23	-.26	-.28	-.31	-.34	-.38	-.40
.56	-.13	-.14	-.18	-.21	-.24	-.26	-.29	-.32	-.36	-.38
.57	-.10	-.12	-.15	-.18	-.20	-.23	-.26	-.29	-.32	-.34
.58	-.08	-.10	-.13	-.16	-.18	-.21	-.24	-.27	-.30	-.32
.59	-.05	-.08	-.10	-.13	-.16	-.18	-.21	-.24	-.28	-.30
.60	-.02	-.05	-.08	-.10	-.13	-.16	-.18	-.22	-.25	-.27
.61	.0	-.02	-.05	-.08	-.10	-.13	-.16	-.19	-.22	-.24
.62	.02	0	-.02	-.06	-.08	-.10	-.14	-.16	-.20	-.22
.63	.05	.02	0	-.03	-.06	-.08	-.11	-.14	-.18	-.20
.64	.08	.06	.03	0	-.02	-.05	-.08	-.11	-.14	-.16
.65	.10	.08	.06	.02	0	-.02	-.06	-.08	-.12	-.14
.66	.13	.10	.08	.05	.02	0	-.03	-.06	-.10	-.12
.67	.16	.14	.11	.08	.06	.03	0	-.03	-.06	-.08
.68	.19	.16	.14	.11	.08	.06	.03	0	-.04	-.06
.69	.22	.20	.18	.14	.12	.10	.06	.04	0	-.02
.70	.24	.22	.20	.16	.14	.12	.08	.06	.02	0
.71	.28	.25	.22	.20	.17	.14	.12	.08	.05	.03
.72	.30	.28	.25	.22	.20	.17	.14	.11	.08	.06
.73	.33	.30	.28	.25	.22	.20	.17	.14	.10	.08
.74	.36	.34	.31	.28	.26	.23	.20	.17	.14	.12
.75	.40	.37	.34	.32	.29	.26	.24	.20	.17	.15
.76	.42	.40	.38	.34	.32	.30	.26	.24	.20	.18
.77	.46	.44	.41	.38	.36	.33	.30	.27	.24	.22
.78	.49	.46	.44	.41	.38	.36	.33	.30	.26	.24
.79	.52	.50	.48	.44	.42	.40	.36	.34	.30	.28
.80	.56	.54	.51	.48	.46	.43	.40	.37	.34	.32
.81	.60	.58	.55	.52	.50	.47	.44	.41	.38	.36
.82	.64	.61	.58	.56	.53	.50	.48	.44	.41	.39
.83	.67	.64	.62	.59	.56	.54	.51	.48	.44	.42
.84	.71	.68	.66	.63	.60	.58	.55	.52	.48	.46
.85	.76	.74	.71	.68	.66	.63	.60	.57	.54	.52
.86	.80	.78	.75	.72	.70	.67	.64	.61	.58	.56
.87	.85	.82	.80	.77	.74	.72	.69	.66	.62	.60
.88	.90	.87	.84	.82	.79	.76	.74	.70	.67	.65
.89	.95	.92	.90	.87	.84	.82	.79	.76	.72	.70
.90	1.00	.98	.95	.92	.99	.87	.84	.81	.78	.76
.91	1.06	1.04	1.01	.98	.96	.93	.90	.87	.84	.82
.92	1.12	1.10	1.07	1.04	1.02	.99	.96	.93	.90	.88
.93	1.19	1.16	1.14	1.11	1.08	1.06	1.03	1.00	.96	.94
.94	1.27	1.24	1.22	1.19	1.16	1.14	1.11	1.08	1.04	1.02
.95	1.36	1.34	1.31	1.28	1.26	1.23	1.20	1.17	1.14	1.12
.96	1.47	1.44	1.42	1.39	1.36	1.34	1.31	1.28	1.24	1.22
.97	1.60	1.58	1.55	1.52	1.50	1.47	1.44	1.41	1.38	1.36
.98	1.77	1.74	1.72	1.69	1.66	1.64	1.61	1.58	1.54	1.52
.99	2.04	2.02	1.99	1.96	1.94	1.91	1.88	1.85	1.82	1.80

Таблица 1 (продолжение)

$p(S/n)$	.71	.72	.73	.74	.75	.76	.77	.78	.79	.80
$p(S/s)$										
.01	-2.88	-2.90	-2.93	-2.96	-3.00	-3.02	-3.06	-3.09	-3.12	-3.16
.02	-2.60	-2.63	-2.66	-2.69	-2.72	-2.76	-2.79	-2.82	-2.86	-2.89
.03	-2.44	-2.46	-2.49	-2.52	-2.56	-2.58	-2.62	-2.65	-2.68	-2.72
.04	-2.30	-2.33	-2.36	-2.39	-2.42	-2.46	-2.49	-2.52	-2.56	-2.59
.05	-2.20	-2.22	-2.25	-2.28	-2.32	-2.34	-2.38	-2.41	-2.44	-2.48
.06	-2.10	-2.13	-2.16	-2.19	-2.22	-2.26	-2.29	-2.32	-2.36	-2.39
.07	-2.02	-2.05	-2.08	-2.11	-2.14	-2.18	-2.21	-2.24	-2.28	-2.31
.08	-1.96	-1.98	-2.01	-2.04	-2.08	-2.10	-2.14	-2.17	-2.20	-2.24
.09	-1.90	-1.92	-1.95	-1.98	-2.02	-2.04	-2.08	-2.11	-2.14	-2.18
.10	-1.84	-1.86	-1.89	-1.92	-1.96	-1.98	-2.02	-2.05	-2.08	-2.12
.11	-1.74	-1.81	-1.84	-1.87	-1.90	-1.94	-1.97	-2.00	-2.04	-2.07
.12	-1.73	-1.76	-1.78	-1.82	-1.85	-1.88	-1.92	-1.94	-1.98	-2.02
.13	-1.68	-1.71	-1.74	-1.77	-1.80	-1.84	-1.87	-1.90	-1.94	-1.97
.14	-1.64	-1.66	-1.69	-1.72	-1.76	-1.78	-1.82	-1.85	-1.88	-1.92
.15	-1.60	-1.62	-1.65	-1.68	-1.72	-1.74	-1.78	-1.81	-1.84	-1.88
.16	-1.54	-1.57	-1.60	-1.63	-1.66	-1.70	-1.73	-1.76	-1.80	-1.83
.17	-1.50	-1.53	-1.56	-1.59	-1.62	-1.66	-1.69	-1.72	-1.76	-1.79
.18	-1.47	-1.50	-1.52	-1.56	-1.59	-1.62	-1.66	-1.68	-1.72	-1.76
.19	-1.44	-1.46	-1.49	-1.52	-1.56	-1.58	-1.62	-1.65	-1.68	-1.72
.20	-1.40	-1.42	-1.45	-1.48	-1.52	-1.54	-1.58	-1.61	-1.64	-1.68
.21	-1.36	-1.38	-1.42	-1.44	-1.48	-1.51	-1.54	-1.58	-1.61	-1.64
.22	-1.32	-1.35	-1.38	-1.41	-1.44	-1.48	-1.51	-1.54	-1.58	-1.61
.23	-1.30	-1.32	-1.35	-1.38	-1.42	-1.44	-1.48	-1.51	-1.54	-1.58
.24	-1.26	-1.28	-1.32	-1.34	-1.38	-1.41	-1.44	-1.48	-1.51	-1.54
.25	-1.23	-1.26	-1.28	-1.32	-1.35	-1.38	-1.42	-1.44	-1.48	-1.52
.26	-1.20	-1.22	-1.25	-1.28	-1.32	-1.34	-1.38	-1.41	-1.44	-1.48
.27	-1.16	-1.19	-1.22	-1.25	-1.28	-1.32	-1.35	-1.38	-1.42	-1.45
.28	-1.14	-1.16	-1.19	-1.22	-1.26	-1.28	-1.32	-1.35	-1.38	-1.42
.29	-1.11	-1.14	-1.16	-1.20	-1.23	-1.26	-1.30	-1.32	-1.36	-1.40
.30	-1.08	-1.10	-1.14	-1.16	-1.20	-1.23	-1.26	-1.30	-1.33	-1.36
.31	-1.06	-1.08	-1.12	-1.14	-1.18	-1.21	-1.24	-1.28	-1.31	-1.34
.32	-1.02	-1.05	-1.08	-1.11	-1.14	-1.18	-1.21	-1.24	-1.28	-1.31
.33	-1.00	-1.02	-1.05	-1.08	-1.12	-1.14	-1.18	-1.21	-1.24	-1.28
.34	-.96	-.99	-1.02	-1.05	-1.08	-1.12	-1.15	-1.18	-1.22	-1.25
.35	-.94	-.96	-1.00	-1.02	-1.06	-1.09	-1.12	-1.16	-1.19	-1.22
.36	-.92	-.94	-.97	-1.00	-1.04	-1.06	-1.10	-1.13	-1.16	-1.20
.37	-.88	-.91	-.94	-.97	-1.00	-1.04	-1.07	-1.10	-1.14	-1.17
.38	-.86	-.88	-.92	-.94	-.98	-1.01	-1.04	-1.08	-1.11	-1.14
.39	-.84	-.86	-.89	-.92	-.96	-.98	-1.02	-1.05	-1.08	-1.12
.40	-.81	-.84	-.86	-.90	-.93	-.96	-1.00	-1.02	-1.06	-1.10
.41	-.78	-.81	-.84	-.87	-.90	-.94	-.97	-1.00	-1.04	-1.07
.42	-.76	-.78	-.81	-.84	-.88	-.90	-.94	-.97	-1.00	-1.04
.43	-.74	-.76	-.79	-.82	-.86	-.88	-.92	-.95	-.98	-1.02
.44	-.70	-.73	-.76	-.79	-.82	-.86	-.89	-.92	-.96	-.99
.45	-.68	-.71	-.74	-.77	-.80	-.84	-.87	-.90	-.94	-.97
.46	-.66	-.68	-.71	-.74	-.78	-.80	-.84	-.87	-.90	-.94
.47	-.63	-.66	-.68	-.72	-.75	-.78	-.82	-.84	-.88	-.92
.48	-.60	-.63	-.66	-.69	-.72	-.76	-.79	-.82	-.86	-.89
.49	-.58	-.60	-.64	-.66	-.70	-.73	-.76	-.80	-.83	-.86
.50	-.56	-.58	-.61	-.64	-.68	-.70	-.74	-.77	-.80	-.84

Таблица I (продолжение)

$p(S/n)$	$p(S/s)$									
	.71	.72	.73	.74	.75	.76	.77	.78	.79	.80
.51	-.53	-.56	-.58	-.62	-.65	-.68	-.72	-.74	-.78	-.82
.52	-.50	-.53	-.56	-.59	-.62	-.66	-.69	-.72	-.76	-.79
.53	-.48	-.50	-.54	-.56	-.60	-.63	-.66	-.70	-.73	-.76
.54	-.46	-.48	-.51	-.54	-.58	-.60	-.64	-.67	-.70	-.74
.55	-.42	-.45	-.48	-.51	-.54	-.58	-.61	-.64	-.68	-.71
.56	-.40	-.43	-.46	-.49	-.52	-.56	-.59	-.62	-.66	-.69
.57	-.38	-.40	-.43	-.46	-.50	-.52	-.56	-.59	-.62	-.66
.58	-.36	-.38	-.41	-.44	-.48	-.50	-.54	-.57	-.60	-.64
.59	-.32	-.35	-.38	-.41	-.44	-.48	-.51	-.54	-.58	-.61
.60	-.30	-.32	-.36	-.38	-.42	-.45	-.48	-.52	-.55	-.58
.61	-.28	-.30	-.33	-.36	-.40	-.42	-.46	-.49	-.52	-.56
.62	-.25	-.28	-.30	-.34	-.37	-.40	-.44	-.46	-.50	-.54
.63	-.22	-.25	-.28	-.31	-.34	-.38	-.41	-.44	-.48	-.51
.64	-.20	-.22	-.25	-.28	-.32	-.34	-.38	-.41	-.44	-.48
.65	-.17	-.20	-.22	-.26	-.29	-.32	-.36	-.38	-.42	-.46
.66	-.14	-.17	-.20	-.23	-.26	-.30	-.33	-.36	-.40	-.43
.67	-.12	-.14	-.17	-.20	-.24	-.26	-.30	-.33	-.36	-.40
.68	-.08	-.11	-.14	-.17	-.20	-.24	-.27	-.30	-.34	-.37
.69	-.05	-.08	-.10	-.14	-.17	-.20	-.24	-.26	-.30	-.34
.70	-.03	-.06	-.08	-.12	-.15	-.18	-.22	-.24	-.28	-.32
.71	0	-.02	-.06	-.08	-.12	-.15	-.18	-.22	-.25	-.28
.72	.02	0	-.03	-.06	-.10	-.12	-.16	-.19	-.22	-.26
.73	.06	.03	0	-.03	-.06	-.10	-.13	-.16	-.20	-.23
.74	.08	.06	.03	0	-.04	-.06	-.10	-.13	-.16	-.20
.75	.12	.10	.06	.04	0	-.03	-.06	-.10	-.13	-.16
.76	.15	.12	.10	.06	.03	0	-.04	-.06	-.10	-.14
.77	.18	.16	.13	.10	.06	.04	0	-.03	-.06	-.10
.78	.22	.19	.16	.13	.10	.06	.03	0	-.04	-.07
.79	.25	.22	.20	.16	.13	.10	.06	.04	0	-.04
.80	.28	.26	.23	.20	.16	.14	.10	.07	.04	0
.81	.32	.30	.27	.24	.20	.18	.14	.11	.08	.04
.82	.36	.34	.30	.28	.24	.21	.18	.14	.11	.08
.83	.40	.37	.34	.31	.28	.24	.21	.18	.14	.11
.84	.44	.41	.38	.35	.32	.28	.25	.22	.18	.15
.85	.48	.46	.43	.40	.36	.34	.30	.27	.24	.20
.86	.52	.50	.47	.44	.40	.38	.34	.31	.28	.24
.87	.58	.55	.52	.49	.46	.42	.39	.36	.32	.29
.88	.62	.60	.56	.54	.50	.47	.44	.40	.37	.34
.89	.68	.65	.62	.59	.56	.52	.49	.46	.42	.39
.90	.72	.70	.67	.64	.60	.58	.54	.51	.48	.44
.91	.78	.76	.73	.70	.66	.64	.60	.57	.54	.50
.92	.84	.82	.79	.76	.72	.70	.66	.63	.60	.56
.93	.92	.89	.86	.83	.80	.76	.73	.70	.66	.63
.94	1.00	.97	.94	.91	.88	.84	.81	.78	.74	.71
.95	1.08	1.06	1.03	1.00	.96	.94	.90	.87	.84	.80
.96	1.20	1.17	1.14	1.11	1.08	1.04	1.01	.98	.94	.91
.97	1.32	1.30	1.27	1.24	1.20	1.18	1.14	1.11	1.08	1.04
.98	1.50	1.47	1.44	1.41	1.38	1.34	1.31	1.28	1.24	1.21
.99	1.76	1.74	1.71	1.68	1.64	1.62	1.58	1.55	1.52	1.48

Т а б л и ц а I (продолжение)

$p(S/n)$	.81	.82	.83	.84	.85	.86	.87	.88	.89	.90
$p(S/s)$										
.01	-3.20	-3.24	-3.27	-3.31	-3.36	-3.40	-3.45	-3.50	-3.55	-3.60
.02	-2.93	-2.96	-3.00	-3.04	-3.09	-3.13	-3.18	-3.22	-3.28	-3.33
.03	-2.76	-2.80	-2.83	-2.87	-2.92	-2.96	-3.01	-3.06	-3.11	-3.16
.04	-2.63	-2.66	-2.70	-2.74	-2.79	-2.83	-2.88	-2.92	-2.98	-3.03
.05	-2.52	-2.56	-2.59	-2.63	-2.68	-2.72	-2.77	-2.82	-2.87	-2.92
.06	-2.43	-2.46	-2.50	-2.54	-2.59	-2.63	-2.68	-2.72	-2.78	-2.83
.07	-2.35	-2.38	-2.42	-2.40	-2.51	-2.55	-2.60	-2.64	-2.70	-2.75
.08	-2.28	-2.32	-2.35	-2.39	-2.44	-2.48	-2.53	-2.58	-2.63	-2.68
.09	-2.22	-2.26	-2.29	-2.33	-2.38	-2.42	-2.47	-2.52	-2.57	-2.62
.10	-2.16	-2.20	-2.23	-2.27	-2.32	-2.36	-2.41	-2.46	-2.51	-2.56
.11	-2.11	-2.14	-2.18	-2.22	-2.27	-2.31	-2.36	-2.40	-2.46	-2.51
.12	-2.06	-2.09	-2.12	-2.16	-2.22	-2.26	-2.30	-2.35	-2.40	-2.46
.13	-2.01	-2.04	-2.08	-2.12	-2.17	-2.21	-2.26	-2.30	-2.36	-2.41
.14	-1.96	-2.00	-2.03	-2.07	-2.12	-2.16	-2.21	-2.26	-2.31	-2.36
.15	-1.92	-1.96	-1.99	-2.03	-2.08	-2.12	-2.17	-2.22	-2.27	-2.32
.16	-1.87	-1.90	-1.94	-1.98	-2.03	-2.07	-2.12	-2.16	-2.22	-2.27
.17	-1.83	-1.86	-1.90	-1.94	-1.99	-2.03	-2.08	-2.12	-2.18	-2.23
.18	-1.80	-1.83	-1.86	-1.90	-1.96	-2.00	-2.04	-2.09	-2.14	-2.20
.19	-1.76	-1.80	-1.83	-1.87	-1.92	-1.96	-2.01	-2.06	-2.11	-2.16
.20	-1.72	-1.76	-1.79	-1.83	-1.88	-1.92	-1.97	-2.02	-2.07	-2.12
.21	-1.68	-1.72	-1.76	-1.80	-1.84	-1.88	-1.94	-1.98	-2.04	-2.08
.22	-1.65	-1.68	-1.72	-1.76	-1.81	-1.85	-1.90	-1.94	-2.00	-2.05
.23	-1.62	-1.66	-1.69	-1.73	-1.78	-1.82	-1.87	-1.92	-1.97	-2.02
.24	-1.58	-1.62	-1.66	-1.70	-1.74	-1.78	-1.84	-1.88	-1.94	-1.98
.25	-1.56	-1.59	-1.62	-1.66	-1.72	-1.76	-1.80	-1.85	-1.90	-1.96
.26	-1.52	-1.56	-1.59	-1.63	-1.68	-1.72	-1.77	-1.82	-1.87	-1.92
.27	-1.49	-1.52	-1.56	-1.60	-1.65	-1.69	-1.74	-1.78	-1.84	-1.89
.28	-1.46	-1.50	-1.53	-1.57	-1.62	-1.66	-1.71	-1.76	-1.81	-1.86
.29	-1.44	-1.47	-1.50	-1.54	-1.60	-1.64	-1.68	-1.73	-1.78	-1.84
.30	-1.40	-1.44	-1.48	-1.52	-1.56	-1.60	-1.66	-1.70	-1.76	-1.80
.31	-1.38	-1.42	-1.46	-1.50	-1.54	-1.58	-1.64	-1.68	-1.74	-1.78
.32	-1.35	-1.38	-1.42	-1.46	-1.51	-1.55	-1.60	-1.64	-1.70	-1.75
.33	-1.32	-1.36	-1.39	-1.42	-1.48	-1.52	-1.57	-1.62	-1.67	-1.72
.34	-1.29	-1.32	-1.36	-1.40	-1.45	-1.49	-1.54	-1.58	-1.64	-1.69
.35	-1.26	-1.30	-1.34	-1.38	-1.42	-1.46	-1.52	-1.56	-1.62	-1.66
.36	-1.24	-1.28	-1.31	-1.35	-1.40	-1.44	-1.49	-1.54	-1.59	-1.64
.37	-1.21	-1.24	-1.28	-1.32	-1.37	-1.41	-1.46	-1.50	-1.56	-1.61
.38	-1.18	-1.22	-1.26	-1.30	-1.34	-1.38	-1.44	-1.48	-1.54	-1.58
.39	-1.16	-1.20	-1.23	-1.27	-1.32	-1.36	-1.41	-1.46	-1.51	-1.56
.40	-1.14	-1.17	-1.20	-1.24	-1.30	-1.34	-1.38	-1.43	-1.48	-1.54
.41	-1.11	-1.14	-1.18	-1.22	-1.27	-1.31	-1.36	-1.40	-1.46	-1.51
.42	-1.08	-1.12	-1.15	-1.19	-1.24	-1.28	-1.33	-1.38	-1.43	-1.48
.43	-1.06	-1.10	-1.13	-1.17	-1.22	-1.26	-1.31	-1.36	-1.41	-1.46
.44	-1.03	-1.06	-1.10	-1.14	-1.19	-1.23	-1.28	-1.32	-1.38	-1.43
.45	-1.01	-1.04	-1.08	-1.12	-1.17	-1.21	-1.26	-1.30	-1.36	-1.41
.46	-.98	-1.02	-1.05	-1.09	-1.14	-1.18	-1.23	-1.28	-1.33	-1.38
.47	-.96	-.99	-1.02	-1.06	-1.12	-1.16	-1.20	-1.25	-1.30	-1.36
.48	-.93	-.96	-1.00	-1.04	-1.09	-1.13	-1.18	-1.22	-1.28	-1.33
.49	-.90	-.94	-.98	-1.02	-1.06	-1.10	-1.16	-1.20	-1.26	-1.30
.50	-.88	-.92	-.95	-.99	-1.04	-1.08	-1.13	-1.18	-1.23	-1.28

Таблица I (продолжение)

(pS/n)	.81	.82	.83	.84	.85	.86	.87	.88	.89	90
(pS/s)										
.51	-.86	-.89	-.92	-.96	-1.02	-1.06	-1.10	-1.15	-1.20	-1.26
.52	-.83	-.86	-.90	-.94	-.99	-1.03	-1.08	-1.12	-1.18	-1.23
.53	-.80	-.84	-.88	-.92	-.96	-1.00	-1.06	-1.10	-1.16	-1.20
.54	-.78	-.82	-.85	-.89	-.94	-.98	-1.03	-1.08	-1.13	-1.18
.55	-.75	-.78	-.82	-.86	-.91	-.95	-1.00	-1.04	-1.10	-1.15
.56	-.73	-.76	-.80	-.84	-.89	-.93	-.98	-1.02	-1.08	-1.13
.57	-.70	-.74	-.77	-.81	-.86	-.90	-.95	-1.00	-1.05	-1.10
.58	-.68	-.72	-.75	-.79	-.84	-.88	-.93	-.98	-1.03	-1.08
.59	-.65	-.68	-.72	-.76	-.81	-.85	-.90	-.94	-1.00	-1.05
.60	-.62	-.66	-.70	-.74	-.78	-.82	-.88	-.92	-.98	-1.02
.61	-.60	-.64	-.67	-.71	-.76	-.80	-.85	-.90	-.95	-1.00
.62	-.58	-.61	-.64	-.68	-.74	-.78	-.82	-.87	-.92	-.98
.63	-.55	-.58	-.62	-.66	-.71	-.75	-.80	-.84	-.90	-.95
.64	-.52	-.56	-.59	-.63	-.68	-.72	-.77	-.82	-.87	-.92
.65	-.50	-.53	-.56	-.60	-.66	-.70	-.74	-.79	-.84	-.90
.66	-.47	-.50	-.54	-.58	-.63	-.67	-.72	-.76	-.82	-.87
.67	-.44	-.48	-.51	-.55	-.60	-.64	-.69	-.74	-.79	-.84
.68	-.41	-.44	-.48	-.52	-.57	-.61	-.66	-.70	-.76	-.81
.69	-.38	-.41	-.44	-.48	-.54	-.58	-.62	-.67	-.72	-.78
.70	-.36	-.39	-.42	-.46	-.52	-.56	-.60	-.65	-.70	-.76
.71	-.32	-.36	-.40	-.44	-.48	-.52	-.58	-.62	-.68	-.72
.72	-.30	-.34	-.37	-.41	-.46	-.50	-.55	-.60	-.65	-.70
.73	-.27	-.30	-.34	-.38	-.43	-.47	-.52	-.56	-.62	-.67
.74	-.24	-.28	-.31	-.35	-.40	-.44	-.49	-.54	-.59	-.64
.75	-.20	-.24	-.28	-.32	-.36	-.40	-.46	-.50	-.56	-.60
.76	-.18	-.21	-.24	-.28	-.34	-.38	-.42	-.47	-.52	-.58
.77	-.14	-.18	-.21	-.25	-.30	-.34	-.37	-.44	-.49	-.54
.78	-.11	-.14	-.18	-.22	-.27	-.31	-.36	-.40	-.46	-.51
.79	-.08	-.11	-.14	-.18	-.24	-.28	-.32	-.37	-.42	-.48
.80	-.04	-.08	-.11	-.15	-.20	-.24	-.29	-.34	-.39	-.44
.81	.0	-.04	-.07	-.11	-.16	-.20	-.25	-.30	-.35	-.40
.82	.04	0	-.04	-.08	-.12	-.16	-.22	-.26	-.32	-.36
.83	.07	.04	0	-.04	-.09	-.13	-.18	-.22	-.28	-.33
.84	.11	.08	.04	0	-.05	-.09	-.14	-.18	-.24	-.29
.85	.16	.12	.09	.05	0	-.04	-.09	-.14	-.19	-.24
.86	.20	.16	.13	.09	.04	0	-.05	-.10	-.15	-.20
.87	.25	.22	.18	.14	.09	.05	0	-.04	-.10	-.15
.88	.30	.20	.22	.18	.14	.10	.04	0	-.06	-.10
.89	.35	.32	.28	.24	.19	.15	.10	.06	0	-.05
.90	.40	.36	.33	.29	.24	.20	.15	.10	.05	0
.91	.46	.42	.39	.35	.30	.26	.21	.16	.11	.06
.92	.52	.48	.45	.41	.36	.32	.27	.22	.17	.12
.93	.59	.56	.52	.48	.43	.39	.34	.30	.24	.19
.94	.67	.64	.60	.56	.51	.47	.42	.38	.32	.27
.95	.76	.72	.69	.65	.60	.56	.51	.46	.41	.36
.96	.87	.84	.80	.76	.71	.67	.62	.58	.52	.47
.97	1.00	.96	.93	.89	.84	.80	.75	.70	.65	.60
.98	1.17	1.14	1.10	1.06	1.04	.97	.92	.88	.82	.77
.99	1.44	1.40	1.37	1.33	1.28	1.24	1.19	1.14	1.09	1.04

Таблица 1 (продолжение)

$p(S/n)$	$p(S/s)$								
	.91	.92	.93	.94	.95	.96	.97	.98	.99
.01	-3.66	-3.72	-3.79	-3.87	-3.96	-4.07	-4.20	-4.37	-4.64
.02	-3.39	-3.45	-3.52	-3.60	-3.69	-3.80	-3.93	-4.10	-4.37
.03	-3.22	-3.28	-3.35	-3.43	-3.52	-3.63	-3.76	-3.93	-4.20
.04	-3.09	-3.15	-3.22	-3.30	-3.39	-3.50	-3.63	-3.80	-4.07
.05	-2.98	-3.04	-3.11	-3.19	-3.28	-3.39	-3.52	-3.69	-3.96
.06	-2.89	-2.95	-3.02	-3.10	-3.19	-3.30	-3.43	-3.60	-3.87
.07	-2.81	-2.87	-2.94	-3.02	-3.11	-3.22	-3.35	-3.52	-3.79
.08	-2.74	-2.80	-2.87	-2.95	-3.04	-3.15	-3.28	-3.45	-3.72
.09	-2.68	-2.74	-2.81	-2.89	-2.98	-3.09	-3.22	-3.39	-3.66
.10	-2.62	-2.68	-2.75	-2.83	-2.92	-3.03	-3.16	-3.33	-3.60
.11	-2.57	-2.63	-2.70	-2.78	-2.87	-2.98	-3.11	-3.28	-3.55
.12	-2.52	-2.58	-2.64	-2.72	-2.82	-2.92	-3.06	-3.22	-3.50
.13	-2.47	-2.53	-2.60	-2.68	-2.77	-2.88	-3.01	-3.18	-3.45
.14	-2.42	-2.48	-2.55	-2.63	-2.72	-2.83	-2.96	-3.13	-3.40
.15	-2.38	-2.44	-2.51	-2.59	-2.68	-2.79	-2.92	-3.09	-3.36
.16	-2.33	-2.39	-2.46	-2.54	-2.63	-2.74	-2.87	-3.04	-3.31
.17	-2.29	-2.35	-2.42	-2.50	-2.59	-2.70	-2.83	-3.00	-3.27
.18	-2.26	-2.32	-2.38	-2.46	-2.56	-2.66	-2.80	-2.96	-3.24
.19	-2.22	-2.28	-2.35	-2.43	-2.52	-2.63	-2.76	-2.93	-3.20
.20	-2.18	-2.24	-2.31	-2.39	-2.48	-2.59	-2.72	-2.89	-3.16
.21	-2.14	-2.20	-2.28	-2.36	-2.44	-2.56	-2.68	-2.86	-3.12
.22	-2.11	-2.17	-2.24	-2.32	-2.41	-2.52	-2.65	-2.82	-3.09
.23	-2.08	-2.14	-2.21	-2.29	-2.38	-2.49	-2.62	-2.79	-3.06
.24	-2.04	-2.10	-2.18	-2.26	-2.34	-2.46	-2.58	-2.76	-3.02
.25	-2.02	-2.08	-2.14	-2.22	-2.32	-2.42	-2.56	-2.72	-3.00
.26	-1.98	-2.04	-2.11	-2.19	-2.28	-2.39	-2.52	-2.69	-2.96
.27	-1.95	-2.01	-2.08	-2.16	-2.25	-2.36	-2.49	-2.66	-2.93
.28	-1.92	-1.98	-2.05	-2.13	-2.22	-2.33	-2.46	-2.63	-2.90
.29	-1.90	-1.96	-2.02	-2.10	-2.20	-2.30	-2.44	-2.60	-2.88
.30	-1.86	-1.92	-2.00	-2.08	-2.16	-2.28	-2.40	-2.58	-2.84
.31	-1.84	-1.90	-1.98	-2.06	-2.14	-2.26	-2.38	-2.56	-2.82
.32	-1.81	-1.87	-1.94	-2.02	-2.11	-2.22	-2.35	-2.52	-2.79
.33	-1.78	-1.84	-1.91	-1.99	-2.08	-2.19	-2.32	-2.49	-2.76
.34	-1.75	-1.81	-1.88	-1.96	-2.05	-2.16	-2.29	-2.46	-2.73
.35	-1.72	-1.78	-1.86	-1.94	-2.02	-2.14	-2.26	-2.44	-2.70
.36	-1.70	-1.76	-1.83	-1.91	-2.00	-2.11	-2.24	-2.41	-2.68
.37	-1.67	-1.73	-1.80	-1.88	-1.97	-2.08	-2.21	-2.38	-2.65
.38	-1.64	-1.70	-1.78	-1.86	-2.04	-2.06	-2.18	-2.36	-2.62
.39	-1.62	-1.68	-1.75	-1.83	-1.92	-2.03	-2.16	-2.33	-2.60
.40	-1.60	-1.66	-1.72	-1.80	-1.90	-2.00	-2.14	-2.30	-2.58
.41	-1.57	-1.63	-1.70	-1.78	-1.87	-1.98	-2.11	-2.28	-2.55
.42	-1.54	-1.60	-1.67	-1.75	-1.84	-1.95	-2.08	-2.25	-2.52
.43	-1.52	-1.58	-1.65	-1.73	-1.82	-1.93	-2.06	-2.23	-2.50
.44	-1.49	-1.55	-1.62	-1.70	-1.79	-1.90	-2.03	-2.20	-2.47
.45	-1.47	-1.53	-1.60	-1.68	-1.77	-1.88	-2.01	-2.18	-2.45
.46	-1.44	-1.50	-1.57	-1.65	-1.74	-1.85	-1.98	-2.15	-2.42
.47	-1.42	-1.48	-1.54	-1.62	-1.72	-1.82	-1.96	-2.12	-2.48
.48	-1.39	-1.45	-1.52	-1.60	-1.69	-1.80	-1.93	-2.10	-2.37
.49	-1.36	-1.42	-1.50	-1.58	-1.66	-1.78	-1.90	-2.08	-2.34
.50	-1.34	-1.40	-1.47	-1.55	-1.64	-1.75	-1.88	-2.05	-2.32

Таблица 1 (продолжение)

$p(S/n)$	$p(S/s)$								
	.91	.92	.93	.94	.95	.96	.97	.98	.99
.51	-1.32	-1.38	-1.44	-1.52	-1.62	-1.72	-1.86	-2.02	-2.30
.52	-1.29	-1.35	-1.42	-1.50	-1.59	-1.70	-1.83	-2.00	-2.27
.53	-1.26	-1.32	-1.40	-1.48	-1.56	-1.68	-1.80	-1.98	-2.24
.54	-1.24	-1.30	-1.37	-1.45	-1.54	-1.65	-1.78	-1.95	-2.22
.55	-1.21	-1.27	-1.34	-1.42	-1.51	-1.62	-1.75	-1.92	-2.19
.56	-1.19	-1.25	-1.32	-1.40	-1.49	-1.60	-1.73	-1.90	-2.17
.57	-1.16	-1.22	-1.29	-1.37	-1.46	-1.57	-1.70	-1.87	-2.14
.58	-1.14	-1.20	-1.27	-1.35	-1.44	-1.55	-1.68	-1.85	-2.12
.59	-1.11	-1.17	-1.24	-1.32	-1.41	-1.52	-1.65	-1.82	-2.09
.60	-1.08	-1.14	-1.22	-1.30	-1.38	-1.50	-1.62	-1.80	-2.06
.61	-1.06	-1.12	-1.19	-1.27	-1.36	-1.47	-1.60	-1.77	-2.04
.62	-1.04	-1.10	-1.16	-1.24	-1.34	-1.44	-1.58	-1.74	-2.02
.63	-1.01	-1.07	-1.14	-1.22	-1.31	-1.42	-1.55	-1.72	-1.99
.64	-.98	-1.04	-1.11	-1.19	-1.28	-1.39	-1.52	-1.69	-1.96
.65	-.96	-1.02	-1.08	-1.16	-1.26	-1.36	-1.50	-1.66	-1.94
.66	-.93	-.99	-1.06	-1.14	-1.23	-1.34	-1.47	-1.64	-1.91
.67	-.90	-.96	-1.03	-1.11	-1.20	-1.31	-1.44	-1.61	-1.88
.68	-.87	-.93	-1.00	-1.08	-1.17	-1.28	-1.41	-1.58	-1.85
.69	-.84	-.90	-.96	-1.04	-1.14	-1.24	-1.38	-1.54	-1.82
.70	-.82	-.88	-.94	-1.02	-1.12	-1.22	-1.36	-1.52	-1.80
.71	-.78	-.84	-.92	-1.00	-1.08	-1.20	-1.32	-1.50	-1.76
.72	-.76	-.82	-.89	-.97	-1.06	-1.17	-1.30	-1.47	-1.74
.73	-.73	-.79	-.86	-.94	-1.03	-1.14	-1.27	-1.44	-1.71
.74	-.70	-.76	-.83	-.91	-1.00	-1.11	-1.24	-1.41	-1.68
.75	-.66	-.72	-.80	-.88	-.96	-1.08	-1.20	-1.38	-1.64
.76	-.64	-.70	-.76	-.84	-.94	-1.04	-1.18	-1.34	-1.62
.77	-.60	-.66	-.73	-.81	-.90	-1.01	-1.14	-1.31	-1.58
.78	-.57	-.63	-.70	-.78	-.87	-.98	-1.11	-1.28	-1.55
.79	-.54	-.60	-.66	-.74	-.84	-.94	-1.08	-1.24	-1.52
.80	-.50	-.56	-.63	-.71	-.80	-.91	-1.04	-1.21	-1.48
.81	-.46	-.52	-.59	-.67	-.76	-.87	-1.00	-1.17	-1.44
.82	-.42	-.48	-.56	-.64	-.72	-.84	-.96	-1.14	-1.40
.83	-.39	-.45	-.52	-.60	-.69	-.80	-.93	-1.10	-1.37
.84	-.35	-.41	-.48	-.56	-.65	-.76	-.89	-1.06	-1.33
.85	-.30	-.36	-.43	-.51	-.60	-.71	-.84	-1.01	-1.28
.86	-.26	-.32	-.39	-.47	-.56	-.67	-.80	-.97	-1.24
.87	-.21	-.27	-.34	-.42	-.51	-.62	-.75	-.92	-1.19
.88	-.16	-.22	-.30	-.38	-.46	-.58	-.70	-.88	-1.14
.89	-.11	-.17	-.24	-.32	-.41	-.52	-.65	-.82	-1.09
.90	-.06	-.12	-.19	-.27	-.36	-.47	-.60	-.77	-1.04
.91	0	-.06	-.13	-.21	-.30	-.41	-.54	-.71	-.98
.92	.06	0	-.07	-.15	-.24	-.35	-.48	-.65	-.92
.93	.13	.07	0	-.08	-.17	-.28	-.41	-.58	-.85
.94	.21	.15	.08	0	-.09	-.20	-.33	-.50	-.77
.95	.30	.24	.17	.09	0	-.11	-.24	-.41	-.68
.96	.41	.35	.28	.20	.11	0	-.13	-.30	-.57
.97	.54	.48	.41	.33	.24	.13	0	-.17	-.44
.98	.71	.65	.53	.50	.41	.30	.17	0	-.27
.99	.98	.92	.85	.77	.68	.57	.44	.27	0

Таблица II

Функция нормального распределения $\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-0,0	,5000	,4960	,4920	,4880	,4840	,4801	,4761	,4721	,4681	,4641
-0,1	,4602	,4562	,4522	,4483	,4443	,4404	,4364	,4325	,4286	,4247
-0,2	,4207	,4168	,4129	,4090	,4052	,4013	,3974	,3936	,3897	,3859
-0,3	,3821	,3783	,3745	,3707	,3669	,3632	,3594	,3557	,3520	,3483
-0,4	,3446	,3409	,3372	,3336	,3300	,3264	,3228	,3192	,3156	,3121
-0,5	,3085	,3050	,3015	,2981	,2946	,2912	,2877	,2843	,2810	,2776
-0,6	,2743	,2709	,2676	,2643	,2611	,2578	,2546	,2514	,2483	,2451
-0,7	,2420	,2389	,2358	,2327	,2297	,2266	,2236	,2206	,2177	,2148
-0,8	,2119	,2090	,2061	,2033	,2005	,1977	,1949	,1922	,1894	,1867
-0,9	,1841	,1814	,1788	,1762	,1736	,1711	,1685	,1660	,1635	,1611
-1,0	,1587	,1562	,1539	,1515	,1492	,1469	,1446	,1423	,1401	,1379
-1,1	,1357	,1335	,1314	,1292	,1271	,1251	,1230	,1210	,1190	,1170
-1,2	,1151	,1131	,1112	,1093	,1075	,1056	,1038	,1020	,1003	,0985
-1,3	,0968	,0951	,0934	,0918	,0901	,0885	,0869	,0853	,0838	,0823
-1,4	,0808	,0793	,0778	,0764	,0749	,0735	,0721	,0708	,0694	,0681
-1,5	,0668	,0655	,0643	,0630	,0618	,0606	,0594	,0582	,0571	,0559
-1,6	,0548	,0537	,0526	,0516	,0505	,0495	,0485	,0475	,0465	,0455
-1,7	,0446	,0436	,0427	,0418	,0409	,0401	,0392	,0384	,0375	,0367
-1,8	,0359	,0351	,0344	,0336	,0329	,0322	,0314	,0307	,0301	,0294
-1,9	,0288	,0281	,0274	,0268	,0262	,0256	,0250	,0244	,0239	,0233
-2,0	,0228	,0222	,0217	,0212	,0207	,0202	,0197	,0192	,0188	,0183
-2,1	,0179	,0174	,0170	,0166	,0162	,0158	,0154	,0150	,0146	,0143
-2,2	,0139	,0136	,0132	,0129	,0125	,0122	,0119	,0116	,0113	,0110
-2,3	,0107	,0104	,0102	,0099	,0096	,0094	,0091	,0089	,0087	,0084
-2,4	,0082	,0080	,0078	,0075	,0073	,0071	,0069	,0068	,0066	,0064
-2,5	,0062	,0060	,0059	,0057	,0055	,0054	,0052	,0051	,0049	,0048
-2,6	,0047	,0045	,0044	,0043	,0041	,0040	,0039	,0038	,0037	,0036
-2,7	,0035	,0034	,0033	,0032	,0031	,0030	,0029	,0028	,0027	,0026
-2,8	,0026	,0025	,0024	,0023	,0023	,0022	,0021	,0021	,0020	,0019
-2,9	,0019	,0018	,0018	,0017	,0016	,0016	,0015	,0015	,0014	,0014
$t = -3,0$ $\Phi(t) = ,0013$	-3,1 ,0010	-3,2 ,0007	-3,3 ,0005	-3,4 ,0003	-3,5 ,0002	-3,6 ,0002	-3,7 ,0001	-3,8 ,0001	-3,9 ,0000	

Таблица II (продолжение)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	,5000	,5040	,5080	,5120	,5160	,5199	,5239	,5279	,5319	,5359
0,1	,5398	,5438	,5478	,5517	,5557	,5596	,5636	,5675	,5714	,5753
0,2	,5793	,5832	,5871	,5910	,5948	,5987	,6026	,6064	,6103	,6141
0,3	,6179	,6217	,6255	,6293	,6331	,6368	,6406	,6443	,6480	,6517
0,4	,6554	,6591	,6628	,6664	,6700	,6736	,6772	,6808	,6844	,6879
0,5	,6915	,6950	,6985	,7019	,7054	,7088	,7123	,7157	,7190	,7224
0,6	,7257	,7291	,7324	,7357	,7389	,7422	,7454	,7486	,7517	,7549
0,7	,7580	,7611	,7642	,7673	,7703	,7734	,7764	,7794	,7823	,7852
0,8	,7881	,7910	,7939	,7967	,7995	,8023	,8051	,8078	,8106	,8133
0,9	,8159	,8186	,8212	,8238	,8264	,8289	,8315	,8340	,8365	,8389
1,0	,8413	,8438	,8461	,8485	,8508	,8531	,8554	,8577	,8599	,8621
1,1	,8643	,8665	,8686	,8708	,8729	,8749	,8770	,8790	,8810	,8830
1,2	,8849	,8869	,8888	,8907	,8925	,8944	,8962	,8980	,8997	,9015
1,3	,9032	,9049	,9066	,9082	,9099	,9115	,9131	,9147	,9162	,9177
1,4	,9192	,9207	,9222	,9236	,9251	,9265	,9279	,9292	,9306	,9319
1,5	,9332	,9345	,9357	,9370	,9382	,9394	,9406	,9418	,9429	,9441
1,6	,9452	,9463	,9474	,9484	,9495	,9505	,9515	,9525	,9535	,9545
1,7	,9554	,9564	,9573	,9582	,9591	,9599	,9608	,9616	,9625	,9633
1,8	,9641	,9649	,9656	,9664	,9671	,9678	,9686	,9693	,9699	,9706
1,9	,9713	,9719	,9726	,9732	,9738	,9744	,9750	,9756	,9761	,9767
2,0	,9772	,9778	,9783	,9788	,9793	,9798	,9803	,9808	,9812	,9817
2,1	,9821	,9826	,9830	,9834	,9838	,9842	,9846	,9850	,9854	,9857
2,2	,9861	,9864	,9868	,9871	,9875	,9878	,9881	,9884	,9887	,9890
2,3	,9893	,9896	,9898	,9901	,9904	,9906	,9909	,9911	,9913	,9916
2,4	,9918	,9920	,9922	,9925	,9927	,9929	,9931	,9932	,9934	,9936
2,5	,9938	,9940	,9941	,9943	,9945	,9946	,9948	,9949	,9951	,9952
2,6	,9953	,9955	,9956	,9957	,9959	,9960	,9961	,9962	,9963	,9964
2,7	,9965	,9966	,9967	,9968	,9969	,9970	,9971	,9972	,9973	,9974
2,8	,9974	,9975	,9976	,9977	,9977	,9978	,9979	,9979	,9980	,9981
2,9	,9981	,9982	,9982	,9983	,9984	,9984	,9985	,9985	,9986	,9986

$t = 3,0$	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9
$\Phi(t) = ,9987$	,9990	,9993	,9995	,9997	,9998	,9998	,9999	,9999	,1,0000

ЛИТЕРАТУРА

1. Бардин К. В. Проблема порогов чувствительности и психофизические методы. М., «Наука», 1976.
2. Соколов Е. Н. Статистическая модель наблюдателя.— В сб.: Инженерная психология. Под ред. А. Н. Леонтьева. М., 1964.
3. Проблемы и методы психофизики. Сборник статей под ред. А. Асмолова и М. Михалевской. Изд-во МГУ, 1974.
4. Психология и математика. Сборник статей под ред. В. Ф. Рубахина. М., «Наука», 1976.
5. Тутубалин В. Н. Теория вероятностей. Изд-во МГУ, 1972.
6. Хелстром К. Статистическая теория обнаружения сигналов. Пер. с англ. Под ред. Ю. Б. Кобзарева. М., ИЛ, 1963.
7. Blackwell H. B. Neural Theories of Simple visual Discriminations.— J. Opt. Soc. America, 1963, 53, 129—160.
8. Boring E. G. A history of experimental psychology. N. Y., 1950.
9. Cohn T., Green D. G., Tanner W. Receiver Operating Characteristic Analysis Application to the Study Quantum Fluctuation Effect in Optic Nerve of Rana pipiens.— J. Gen. Phys., 1975, 66, 583—616.
10. Egan I. P. Signal Detection Theory and ROC Analysis. N. Y. Acad. Press, 1975.
11. Elliott P. B. Yes-No Tables.— In.: Signal Detection and Recognition by Human Observers. J. Wiley and Sons, N. Y., 1964.
12. Fechner G. T. Elemente der Psychophysik. Leipzig, Breikopf und Hartel, 1860.
13. Fletcher H. Auditory Patterns.— Rev. Mod. Phys., 1940, 12, 47—65.
14. Green D. M., Swets I. A. Signal Detection Theory and Psychophysisc. N. Y.— London — Sydney, J. Wiley and Sons, 1966.
15. Stevens S. S. Handbook of Experimental Psychology. N. Y., John Wiley and Sons, Inc., 1951.
16. Hancock L. C., Wintz P. A. Signal Detection Theory. McGraw-Hill, 1966.
17. Korzh N. N., Leonov Ju. P. Threshold properties of memory.— In: Advances in Psychophysics. Berlin, 1976.
18. Leonov Yu. P. Decision Theory and the Concept of Threshold in Psychophysics.— Trans. Soviet Psychol., 1975, № 13, 78.
19. Luce R. D. A Threshold Theory for Simple Detection Experiments.— Psychol. Rev., 1963, 70, 61—79.
20. Piéron H. Vocabulaire de la psychologie publie avec la collaboration de l'association des travailleurs scientifiques.

21. *Rose A.* The Sensitivity Performance of the Human Eye on an Absolute Scale.—*J. Opt. Soc. America*, 1948, 38, 196—208.
22. *Stevens S. S.* On the psychological law.—*Psychol. Rev.*, 1957, 64, N 3, 153—181.
23. *Swets J. A.* Is There a Sensory Threshold? — *Science*, 1961, 134, 168—177.
24. *Treisman M.* Noise and Weber's Law: The Discrimination of Brightness and Other Dimension». — *Psychol. Rev.*, 1964, 71, 314—330.
25. *Thurstone H. H.* Psychophysical analysis.—*Amer. J. Psychol.*, 1927, 38, 368—389.
26. *Vries H., de.* The Quantum Character of Light and its Bearing upon the Threshold of Vision, the Differential Sensitivity and the Visual Acuity of the Eye.—*Physica (Utrecht)*, 1943, 10, 553—564.
27. *Woodworth R., Schlosberg H.* Experimental Psychology. N. Y., 1958, p. 234—266.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

Бейес 11, 25, 161
Бернулли 46, 51, 159
Бессель 116
Блэквелл Г. Р. 75
Боринг Е. Ж. 153

Вавилов С. И. 3
Вебер Е. П. 85, 89, 126, 152

Гельмгольц Х. Л. 133
Гербарт Дж. Ф. 70
Грин Д. М. 75, 133

Лейбниц 70
Люс Р. Д. 75, 79 (рис. 6.8), 80, 81

Нейман Дж. 28

Пайпер 94
Паскаль 51
Пирсон Е. С. 28
Пуассон 52, 53—57, 75, 89

Пьерон Г. 93, 94

Райс Г. 91, 93
Рикко 94
Роза А. 93
Рэлей Дж. 117

Светс Дж. А. 72, 75, 133
Стивенс С. С. 13, 141, 144, 145, 153

Терстон Л. Л. 13
Трейсман М. 89

Урбан Ф. 72

Фехнер Ж. Т. 5, 13, 70, 72, 88, 145,
151
Флетчер Г. 133, 138, 139

Эллиот П. В. 194

Ястров Дж. 72

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абсолютная чувствительность (см. Чувствительность абсолютная)
Абсолютный порог (см. Порог абсолютный)
Анализатор зрительный 88
Апостериорная плотность вероятности (см. Плотность вероятности)
Аргумент М-функции 73, 85, 121
Асимметрия рабочей характеристики 63
- Бейеса теорема 11
Бейесовская оптимальная стратегия 25, 26
Бернулли испытания 46
- Вебера закон 85
Вероятность 80, 158
— апостериорная 10
— ложной тревоги 21
— попадания (обнаружения) 21
— появления сигнала и шума 61
Восприятие как динамический процесс 95
- Гамма-распределение (см. Распределение гамма-)
Геометрическое распределение (см. Распределение геометрическое)
Гипотеза 9, 10
- Детектор огибающей 114
Детектор энергетический 133
Дифференциальная чувствительность (см. Чувствительность дифференциальная)
Едва заметное различие (е.з.р.) 148, 152
- Закон квадратного корня 57
Законы пространственной и временной суммации 91
Законы психофизические 84
Зрительный анализатор (см. Анализатор зрительный)
- Индивидуальные различия (см. Различия индивидуальные)
- Истинная рабочая характеристика (см. Рабочая характеристика)
- Критерий 28
— «идеальный наблюдатель» 28
— минимаксный 176
— минимального риска 24
— оптимальности 23, 28
- Критическая полоса (см. Полоса критическая)
- Логарифм отношения правдоподобия нормального распределения 18, 96, 146, 149
Логарифмическая шкала (см. Шкала логарифмическая)
- Минимаксный критерий (см. Критерий минимаксный)
Моменты случайной величины 168, 160
- Монотонная функция отношения правдоподобия 18
М-функция 73, 74, 84, 118, 119, 122
- Неймана — Пирсона критерий 28
Нейронная система (см. Система нейронная)
Немонотонная функция отношения правдоподобия 18, 149
- Обнаружение сигнала 12, 20, 29
Оптимальное решающее правило (см. Правило оптимальное решающее)
Оптимальность 23
— понятие 23
— критерий 23, 25
- Отношение правдоподобия 11, 17, 18, 19, 31, 41, 47, 49, 52, 55
Оценка 101
— параметра 101
— собственных шумов нейронной системы 127, 138, 193
- Пайпера закон 92, 94
Паскаля распределение 51
Пуассона распределение 52
Параметр d' 18, 121, 127, 138

Плотность вероятности 10
— — апостериорная 10, 18, 20
— — показательная 55
— — центрированного χ^2 -распределения 164
— — нецентрированного χ^2 -распределения 165
— — равномерного распределения 163
— — нормального распределения 18, 19, 20, 29, 37, 38, 42, 51, 93, 96, 99, 112, 114, 120, 123
— — распределения Рэлея 117, 164

Порог 14
— абсолютный 14
— дифференциальный 85
— отношения правдоподобия 11, 17, 18
— разностный 85, 149

Правило оптимальное решающее 23

Правило решающее 10, 22

Пространство 12

— сенсорное 12, 13, 141

— ощущений 12

Психометрическая функция (см.

Функция психометрическая)

Психофизические законы (см. Законы психофизические)

Полоса критическая 133

Пьерона закон 92, 94

Различия индивидуальные 65

Распределение 46

— биномиальное 46, 52

— биномиальное отрицательное 52

— гамма- 55

— геометрическое 51, 52

— нормальное 38, 51, 120, 218

Резонансная теория слуха 133

Решающее правило (см. Правило решающее)

Рикко закон 94

Рэлея распределение 64, 116

Сенсорное пространство (см. Пространство сенсорное)

Система нейронная 5

Сигнал полезный 12

Случайный процесс 169

Собственные шумы нейронной системы 12, 88, 127, 137

Спектральная плотность 99, 171

Теория 75

— высокого порога 75, 79

— низкого порога 79

— обнаружения 95

— решений 75

Функция 11

— отношения правдоподобия (см. Отношение правдоподобия) 11

— плотности вероятности (см. Плотность вероятности)

— психометрическая 76, 138

Функциональное разделение нейронной системы 82

Характеристика рабочая (РХ) 37

— — в вероятностном масштабе 39

— — детектора огибающей 117

— — для распределения Бернулли 47, 48

— — истинная 49

— — и М-функция 59, 138

— — «неистинная» 49

— — нормального распределения 37

— — построение 59, 65

— — процесса решения 37

— — распределения Паскаля 51

— — распределения Пуассона 52, 57

— — теории высокого порога 76

— — теории низкого порога 80

— — энергетического детектора 133

— — экспериментальная 61, 63—65

Цена решения 25

Чувствительность 85

— абсолютная 118

— дифференциальная 85

Шкала 141

— логарифмическая 151

— отношения правдоподобия 145, 146

— психометрическая 143

— степенная 153

Энергетический детектор (см. Детектор энергетический)

Энергия сигнала 98

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Введение	5
Глава 1. Основные понятия теории статистических решений .	9
§ 1. Определения	9
§ 2. Решающее правило	10
Глава 2. Характеристики системы, принимающей решения . . .	15
§ 1. Функция отношения правдоподобия	15
§ 2. Рабочая характеристика процесса решения	19
Глава 3. Понятие оптимальности	22
§ 1. Начало оптимальности	22
§ 2. Критерий минимального риска	24
§ 3. Другие критерии	28
Глава 4. Экспериментальные исследования процессов принятия решения в нейронных системах	33
§ 1. Основные схемы психофизических экспериментов . .	33
§ 2. Свойство рабочей характеристики	35
§ 3. Рабочая характеристика в опытах с двумя интервалами стимулирования	40
§ 4. Рабочие характеристики дискретных процессов	45
Глава 5. Рабочие характеристики нейронных систем	59
§ 1. Различные методики эксперимента для построения ра- бочих характеристик	59
§ 2. Сравнение решений наблюдателя с оптимальными ре- шениями	62
§ 3. Асимметрия рабочих характеристик	63
§ 4. Использование рабочих характеристик, построенных в вероятностном масштабе	64
§ 5. Индивидуальные различия рабочих характеристик . . .	65
§ 6. Техника построения рабочих характеристик по не- скольким точкам	65
Глава 6. Теория статистических решений и определение порога в психофизике	70
§ 1. Определение порога	70
§ 2. Теория высокого порога	75
§ 3. Теория низкого порога	79
§ 4. Функциональное разделение нейронной системы на подсистемы	82

Глава 7. Психофизические законы	84
§ 1. М-функция как характеристика дифференциальной чувствительности	84
§ 2. Закон Вебера	85
§ 3. Анализ влияния собственных шумов зрительного анализатора	88
§ 4. Законы пространственной и временной суммации . .	91
Глава 8. Восприятие как динамический процесс	95
§ 1. Обнаружение сигналов, являющихся функциями времени	95
§ 2. Связь задачи обнаружения с задачей оценки параметров сигнала	101
§ 3. Разрешение сигналов	104
§ 4. Точная теория	110
§ 5. Детектор огибающей	114
Глава 9. Теория М-функции и анализ внутренних шумов детектора	118
§ 1. Различные схемы опытов для получения рабочих характеристик и М-функции	118
§ 2. Построение рабочих характеристик и М-функций для первой схемы опытов	119
§ 3. Построение рабочих характеристик и М-функций для второй схемы опытов	122
§ 4. Третья и четвертая схемы опытов	124
§ 5. Закон Вебера для временных сигналов	126
§ 6. Соответствие теории экспериментальным данным. Параметр d'	127
Глава 10. Энергетический детектор. Проблема критической полосы	133
§ 1. Теория энергетического детектора	133
§ 2. Учет собственных шумов системы	137
§ 3. Проблема оценки критической полосы	138
Глава 11. Проблема шкалирования	141
§ 1. Пространство ощущений. Шкалирование	141
§ 2. Шкала отношения правдоподобия	145
§ 3. Логарифмическая шкала Фехнера	151
§ 4. Степенная шкала Стивенса	153
Закключение	157
Приложения	
Приложение I. Некоторые сведения из теории вероятностей	158
Приложение II. Вывод байесовского оптимального правила	173
Приложение III. Сложные и многоальтернативные гипотезы	176

Приложение IV. Рабочая характеристика в эксперименте с принудительным выбором	180
Приложение V. Детектор огибающей	184
Приложение VI. Апостериорные плотности вероятности энергетического детектора	188
Приложение VII. Оценка собственных шумов детектора	
Таблицы d'	193
Значения параметра d' . (Таблица I)	198
Функция нормального распределения. (Таблица II).	218
Литература	220
Именной указатель	222
Предметный указатель	223

Юрий Петрович Леонов
ТЕОРИЯ СТАТИСТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ
И ПСИХОФИЗИКА

Утверждено к печати
Институтом психологии АН СССР

Редактор издательства К. Ф. Пашковская
Художник Н. Б. Старцев
Художественный редактор Н. Н. Власик
Технический редактор Н. П. Кузнецова

Сдано в набор 24/XI 1976 г.
Подписано к печати 22/II 1977 г.
Формат 60×90¹/₁₆
Бумага типографская № 1
Усл. печ. л. 14,25
Уч.-изд. л. 14,3
Тираж 4200
Т-0334*
Тип. зак. 1483
Цена 1 р. 26 к.

Издательство «Наука»,
103717 ГСП, Москва, К-62, Подсосенский пер., д. 21
2-я типография издательства «Наука»,
121099, Москва, Г-99, Шубинский пер., 10

Опечатки и исправления

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть
15	13 стр.	(1,6)	(1,3)
23	5 св.	$<$	$>$
60	1 стр.	полезный сигнал s	один шум n
60	3 стр.	C_{Ns}	C_{Nn}
76	5 св.	$p(S/n)$	$p(S/s)$
87	Рис. 7.1	$1,0\lambda$	$\Delta t/\sigma$
134	1 стр.	V (см. формулы (V.7), (V.8), (V.15)—(V.18))	VI (см. формулы (VI.7), (VI.8), (VI.15)—(VI.18))